Zum Isomorphieproblem der torsionsfreien, endlich erzeugten, nilpotenten Gruppen

Von der
Carl-Friedrich-Gauß-Fakultät
der Technischen Universität Carolo-Wilhelmina zu Braunschweig

zur Erlangung des Grades einer
Doktorin der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

genehmigte Dissertation

von
Ann-Kristin Engel
geboren am 19.11.1984
in Dortmund

Eingereicht am:	19.05.2016
Disputation am:	08.07.2016
1. Referentin:	Prof. Dr. Bettina Eick
2. Referent:	Prof. Dr. Gerhard Rosenberger

2016

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Das Konzept der **Gruppen** ist nicht nur innerhalb der Mathematik ein zentrales Thema, sondern auch in Teilgebieten der Chemie, der Physik, der Informatik, der Mechanik und sogar der Musik. So finden Gruppen unter anderem Verwendung in der Quantentheorie, der Spektroskopie, der Kristallographie, der Kryptographie und der statistischen Mechanik.

Die **Gruppentheorie** hat sich im 18. und 19. Jahrhundert aus verschiedenen Richtungen der Mathematik heraus entwickelt. Eine abstrakte Definition einer beliebigen Gruppe findet man in einer Arbeit von Cayley [6] aus dem Jahr 1854. In der Theorie der unendlichen Gruppen spielt das Konzept der nilpotenten Gruppen eine zentrale Rolle. In dieser Arbeit wird die folgende spezielle Klasse nilpotenter Gruppen betrachtet.

Definition
Eine torsionsfreie, endlich erzeugte, nilpotente Gruppe heißt ***$\mathcal{T}$-Gruppe***.

Jede $\mathcal{T}$-Gruppe hat eine Zentralreihe mit unendlichen zyklischen Faktoren, vgl. [16, Sec 5.2]. Die Länge einer solchen Reihe heißt **Hirschlänge**. Diese Notation stammt aus der Theorie der polyzyklischen Gruppen, siehe Hirsch [14] oder [16, Sec. 5.4].

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Vervollständigung der Klassifikation der $\mathcal{T}$-Gruppen der Hirschlänge höchstens 5 bis auf Isomorphie zusammen mit einer Beschreibung der Automorphismengruppen dieser Gruppen. Dieses Ergebnis ist auch in den Publikationen [4] und [5] zu finden. Um weiter ins Detail gehen zu können, werden wir in den folgenden Abschnitten zunächst einige Grundlagen aus der Theorie der $\mathcal{T}$-Gruppen erläutern.

$\mathcal{T}$-Präsentationen

Jede $\mathcal{T}$-Gruppe kann durch eine spezielle Sorte von Präsentationen beschrieben werden. Diese sogenannten $\mathcal{T}$-Präsentationen sollen hier kurz vorgestellt werden. Siehe Abschnitt 2.3 oder [13, Sec. 8.1, 8.2] beziehungsweise [17, Sec. 9.4] für weitere Details.

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $t = (t_{i,j,k} \mid 1 \leq i < j < k \leq n) \in \mathbb{Z}^{\binom{n}{3}}$. Eine durch den Vektor t beschriebene Präsentation

$$G(t) = \langle g_1, \ldots, g_n \mid [g_j, g_i] = g_{j+1}^{t_{i,j,j+1}} \cdots g_n^{t_{i,j,n}} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n \rangle$$

bezeichnen wir als **$\mathcal{T}$-Präsentation**. Die Gruppe $G(t)$, die durch solch eine $\mathcal{T}$-Präsentation definiert wird, ist dann endlich erzeugt und nilpotent von der Hirschlänge höchstens n. Eine $\mathcal{T}$-Präsentation heißt **konsistent**, wenn die dadurch definierte Gruppe $G(t)$ genau die Hirschlänge n hat. In Abschnitt 2.3 wird gezeigt, dass es zu jeder $\mathcal{T}$-Gruppe G der Hirschlänge n einen (oder mehrere) Vektoren $t \in \mathbb{Z}^{\binom{n}{3}}$ gibt, so dass t eine konsistente Präsentation beschreibt und $G \cong G(t)$ gilt. Im Verlauf dieser Arbeit werden $\mathcal{T}$-Gruppen durch konsistente $\mathcal{T}$-Präsentationen dargestellt.

Das Isomorphieproblem

Generell kann eine Gruppe verschiedene Präsentationen haben und oftmals ist es auf den ersten Blick nicht ersichtlich, ob zwei Präsentationen isomorphe Gruppen beschreiben oder nicht. Die triviale Gruppe beispielsweise lässt sich durch die Präsentationen $\langle \mid \rangle$ und $\langle x, y \mid xy^2 = y^3x, yx^2 = x^3y \rangle$ darstellen, nachzulesen in [1, Kap. 3].

Die Frage, ob zwei Präsentationen isomorphe Gruppen beschreiben oder nicht, wird auch als das **Isomorphieproblem** bezeichnet und wurde 1911 von Dehn formuliert. Es ist bekannt, dass das Isomorphieproblem im Allgemeinen nicht entscheidbar ist, siehe auch [1, Kap. 3]. Grunewald & Segal [8, 9] haben gezeigt, dass dies für $\mathcal{T}$-Gruppen anders ist: das Isomorphieproblem für $\mathcal{T}$-Gruppen ist entscheidbar. Allerdings scheint es schwierig, den von Grunewald & Segal beschriebenen Algorithmus in die Praxis umzusetzen, selbst in sehr kleinen Fällen. Vergleiche dazu auch die Arbeit von de Graaf & Pavan [2].

Einen praktikablen Algorithmus zur Lösung des Isomorphieproblems für gewisse $\mathcal{T}$-Gruppen der Nilpotenzklasse 2, darunter diejenigen der Hirschlänge höchstens 5, liefert eine Arbeit von Grunewald & Scharlau [10] aus dem Jahr 1979. Für $\mathcal{T}$-Gruppen mit einer höheren Nilpotenzklasse ist keine allgemeine, praktikable Methode zur Lösung des Isomorphieproblems bekannt.

Klassifikation von $\mathcal{T}$-Gruppen

Ein erster Schritt zur Lösung des Isomorphieproblems für $\mathcal{T}$-Gruppen ist, die Menge der $\mathcal{T}$-Gruppen anhand ihrer inneren Struktur in verschiedene Typen zu unterteilen. Die folgende Definition dient als Hilfsmittel dazu.

Definition
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe der Nilpotenzklasse c und $G = \gamma_1(G) > \cdots > \gamma_c(G) > \gamma_{c+1}(G) = \{1\}$ die absteigende Zentralreihe von G. Weiter sei $I_k(G)/\gamma_k(G)$ die Torsionsuntergruppe von $G/\gamma_k(G)$ für $1 \leq k \leq c+1$. Dann heißt

$$G = I_1(G) > I_2(G) > \cdots > I_c(G) > I_{c+1}(G) = \{1\}$$

*die **Isolatorreihe** von G.*

Die Isolatorreihe ist eine vollständig invariante, charakteristische Zentralreihe von G mit torsionsfreien Quotienten $G/I_{k+1}(G)$ und frei abelschen Faktoren $I_k(G)/I_{k+1}(G)$ für $1 \leq k \leq c$.

Definition
*Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe mit Nilpotenzklasse c und sei d_k der Rang des Faktors $I_k(G)/I_{k+1}(G)$ für $1 \leq k \leq c$. Dann heißt $(d_1, \ldots, d_c)$ der **Typ** von G.*

Am Typ $(d_1, \ldots, d_c)$ einer $\mathcal{T}$-Gruppe G kann man sowohl ihre Hirschlänge via $d_1 + \ldots + d_c$ als auch ihre Nilpotenzklasse c ablesen. Die möglichen Typen der $\mathcal{T}$-Gruppen der Hirschlänge höchstens 5 sind in der folgenden Tabelle bezüglich ihrer Hirschlänge n und ihrer Nilpotenzklasse c aufgelistet.

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
$c = 1$	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
$c = 2$			(2,1)	(3,1)	(4,1)
					(3,2)
$c = 3$				(2,1,1)	(3,1,1)
					(2,1,2)
$c = 4$					(2,1,1,1)

In der ersten Zeile dieser Tabelle findet man die Gruppen der Klasse 1. Ihre Klassifikation ist trivial, denn für jedes $n \geq 1$ gibt es genau eine $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge n und der Klasse 1 und zwar die frei abelsche Gruppe vom Rang n. Die blau hinterlegten Gruppen der Klasse 2 wurden bereits von Grunewald und Scharlau [10] klassifiziert. In Kapitel 7 wiederholen wir diese Klassifikation der Vollständigkeit halber.

Die grün hinterlegten Gruppen der Klassen 3 und 4 bis auf Isomorphie zu klassifizieren, ist das Hauptziel dieser Arbeit. Mehr dazu findet man in den Abschnitten 4.2.1, 4.3.1, 5.2 und 6.2. Der Kern dieser Klassifikation lässt sich wie folgt beschreiben.

Für eine $\mathcal{T}$-Gruppe G der Hirschlänge $n \leq 5$ und der Nilpotenzklasse mindestens 3 sei

$$T(G) = \{t \in \mathbb{Z}^{\binom{n}{3}} \mid G \cong G(t)\}$$

die Menge aller Vektoren, die über eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation in n Erzeugern eine zu G isomorphe Gruppe definieren. Damit beschreibt $T(G)$ den Isomorphietyp von G vollständig. Nun wird ein eindeutiger kanonischer Vektor in $T(G)$ definiert, der diesen Isomorphietyp repräsentiert. Insbesondere wird eine praktikable Methode beschrieben, um zu einem beliebigen Vektor t den kanonischen Vektor, den wir mit $\mathrm{Cf}(t)$ bezeichnen, zu berechnen. Die zu G isomorphe Gruppe $G(\mathrm{Cf}(t))$ nennen wir die kanonische Form von G. Der Algorithmus zur Berechnung von $\mathrm{Cf}(t)$ lässt sich in einem Computeralgebra-System wie zum Beispiel GAP implementieren. Wenn die Ergebnisse von Grunewald und Scharlau mit einbezogen werden, kann damit das Isomorphieproblem für $\mathcal{T}$-Gruppen der Hirschlänge höchstens 5 wie folgt gelöst werden.

Satz
Zwei beliebige $\mathcal{T}$-Gruppen G_1 und G_2 der Hirschlänge höchstens 5 sind genau dann isomorph, wenn sie den selben Typ haben und ihre kanonische Form übereinstimmt.

Ein weiteres Ergebnis dieser Arbeit ist die Beschreibung der **Automorphismengruppe** einer beliebigen $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge höchstens 5.

Die grundlegende Idee hinter dem Erreichen der Ziele in dieser Arbeit ist die Übersetzung des Isomorphieproblems für $\mathcal{T}$-Gruppen in die Berechnung eines Systems von Polynomgleichungen.

Dazu wird jeder Typ einzeln betrachtet. Wichtige Hilfsmittel hierbei sind die Darstellung der betrachteten Gruppen durch $\mathcal{T}$-Präsentationen sowie die zugehörigen Hall Polynome, die die Multiplikation in der Gruppe realisieren. Zu Letzterem vergleiche [4] oder Abschnitt 3.2.

Der Schwerpunkt dieser Arbeit liegt darin, mit Hilfe eines solchen Gleichungssystems, eine eindeutig bestimmte kanonische Form zu berechnen. Dies geschieht, abhängig von dem zu Grunde liegenden Typ, mit verschiedenen mathematischen Methoden aus der Gruppentheorie und der ganzzahligen Arithmetik.

Gruppen vom Typ (n,1,1)

Des Weiteren betrachten wir noch die $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ $(n, 1, 1)$ mit $n \geq 4$. Für diese Gruppen der Hirschlänge $n + 2$ und der Nilpotenzklasse 3 wird hier keine kanonische Form konstruiert, aber es wird ihre Struktur untersucht und ein Ansatz zur „Reduktion" ihrer $\mathcal{T}$-Präsentationen $G(t)$ entwickelt.

Satz
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(n, 1, 1)$. Dann existiert ein $e \in \mathbb{N}$, so dass G eine zentrale Erweiterung der Form

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow \bar{G}_e \longrightarrow 1$$

ist. Es gilt $\mathrm{Bild}(\varphi) = I_3(G)$ *und $\bar{G}_e$ ist eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(n, 1)$ mit*

$$\bar{G}_e \cong \langle g_1, \ldots, g_n, g_{n+1} \mid [g_2, g_1] = g_{n+1}^e, [g_j, g_i] = 1, 1 \leq i < j \leq n, (i, j) \neq (1, 2)\rangle.$$

Darüber hinaus zeigen wir, dass die Erweiterung G eine $\mathcal{T}$-Präsentation hat, deren nicht-triviale Relationen für $1 \leq i < j \leq n,\ (i, j) \neq (1, 2)$ folgende Form haben

$$\begin{aligned} [g_2, g_1] &= g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha_{1,2}}, \\ [g_j, g_i] &= g_{n+2}^{\alpha_{i,j}}, \\ [g_{n+1}, g_1] &= g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}}, \\ [g_{n+1}, g_2] &= g_{n+2}^{\alpha_{2,n+1}}. \end{aligned}$$

Daher wird jede $\mathcal{T}$-Gruppe G vom Typ $(n, 1, 1)$ durch einen Vektor

$$\alpha = (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \ldots, \alpha_{(n-1),n}, \alpha_{1,n+1}, \alpha_{2,n+2}) \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$$

beschrieben. Mit Hilfe der Kohomologietheorie entwickeln wir eine Methode, um α zu einem Vektor $\bar{\alpha}$ umzuformen, der eine zu G isomorphe Gruppe beschreibt. Das Ziel einer solchen Operation ist es einen Vektor $\bar{\alpha}$ zu erhalten, der möglichst dünn besetzt ist und dessen Einträge wenn möglich positiv und/oder betragsmäßig klein sind.

Kapitel 2

Grundlagen

2.1 Notationen

Im Folgenden seien $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ und $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Seien $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \mathbb{N}$ gegeben. Der euklidische Algorithmus liefert eine Darstellung von x in der Form

$$(*) \quad x = ky + r$$

mit $r \in \{0, \ldots, y-1\}$. Im Verlauf dieser Arbeit nutzen wir folgende Notationen

$$\begin{aligned} x \,\mathbf{div}\, y &:= k, \\ x \,\mathbf{mod}\, y &:= r. \end{aligned}$$

Weiter sei $s = \mathrm{Min}\{x \bmod y, (-x) \bmod y\}$. Dann existieren ein $e \in \{1, -1\}$ und ein $t \in \mathbb{Z}$, so dass

$$(**) \quad ex = ty + s$$

gilt. Im Fall $y \mid x$ gilt die Gleichung für $t = e\frac{x}{y}$ und $s = 0$. Ansonsten gilt mit den Notationen von $(*)$ entweder $s = r$, $e = 1$ und $t = k$ oder $s = -r + y$, $e = -1$ und $t = -k - 1$.
Die Menge aller $e \in \{\pm 1\}$, die die Gleichung $(**)$ erfüllen, beschreiben wir durch

$$\mathbf{pref}((\pm x) \bmod y)$$

und bezeichnen sie als ***prefix*** von $(\pm x) \bmod y$.

Bemerkung 2.1.1
Seien $x \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{N}$ und $s = \mathrm{Min}\{x \bmod y, (-x) \bmod y\}$. Dann gelten folgende Aussagen.

(a) *Es gilt $s \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{y}{2} \rfloor\}$.*

(b) *Die Menge $\mathrm{pref}((\pm x) \bmod y)$ ist eine nicht-leere Teilmenge von $\{1, -1\}$.*

(c) *Es gilt $\mathrm{pref}((\pm x) \bmod y) = \{1, -1\}$ genau dann, wenn $s \in \{0, y/2\}$ gilt.*

Beweis:

(a) Im Fall $s = 0$ ist die Bedingung erfüllt. Sei nun $s \neq 0$ und $x \bmod y = r$ mit $r \in \{0, \ldots, y-1\}$. Es gilt $s = \text{Min}\{r, y-r\}$ und damit nach Konstruktion $s \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{y}{2} \rfloor\}$.

(b) Dieser Punkt folgt direkt aus der Definition des prefix.

(c) Sei nun $\text{pref}((\pm x) \bmod y) = \{1, -1\}$. Dann gilt $s \equiv -s \bmod y$ und damit $y \mid 2s$. Da $s \in \{0, \ldots, \lfloor y/2 \rfloor\}$ gilt, folgt $s = 0$ oder $s = y/2$. Umgekehrt folgt aus $0 \equiv -0 \bmod y$ und $\frac{y}{2} \equiv -\frac{y}{2} \bmod y$ die Behauptung.

□

2.2 Diophantische Gleichungen

In diesem Abschnitt rekapitulieren wir einige grundlegende Ergebnisse über diophantische Gleichungen. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit sind sie ein wichtiges Hilfsmittel.

Lemma 2.2.1
Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ und sei $d = \text{ggT}(a_1, \ldots, a_n)$. Dann gilt

$$\{a_1x_1 + \ldots + a_nx_n \mid x_1, \ldots, x_n\} = \{kd \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

Beweis:
"$\subseteq$" : Wir müssen zeigen, dass es zu jedem n-Tupel $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = kd$ gibt. Da d jedes a_i für $1 \leq i \leq n$ teilt, können wir ein solches k wie folgt berechnen

$$(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)/d = \frac{a_1}{d}x_1 + \ldots + \frac{a_n}{d}x_n = k \in \mathbb{Z}.$$

"$\supseteq$" : Nun gilt es zu zeigen, dass es für alle $k \in \mathbb{Z}$ eine Darstellung von kd als $\mathbb{Z}$-Linearkombination von $a_1, \ldots, a_n$ gibt. Der euklidische Algorithmus liefert für gewisse $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{Z}$ eine Darstellung $d = a_1y_1 + \ldots + a_ny_n$. Damit gilt für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$kd = a_1ky_1 + \ldots + a_nky_n.$$

□

Lemma 2.2.1 impliziert, dass eine lineare diophantische Gleichung $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = a_{n+1}$ mit gegebenen $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{Z}$ und Unbestimmten $x_1, \ldots, x_n$ genau dann eine Lösung mit $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ hat, wenn gilt $\text{ggT}(a_1, \ldots, a_n) \mid a_{n+1}$.
Es ist bekannt, dass die Menge aller Lösungen in diesem Fall $n-1$ freie Parameter hat. Wir rekapitulieren die Konstruktion einer solchen Lösungsmenge für die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ im Folgenden.

Lemma 2.2.2
Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ mit $d = \text{ggT}(a, b)$ und $g = \text{ggT}(a, b, c)$. Seien weiter $s, t \in \mathbb{Z}$ mit $d = as + bt$ und $u, v, w \in \mathbb{Z}$ mit $g = au + bv + cw$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

(a) $L = \{(s+x\frac{b}{d}, t-x\frac{a}{d}) \mid x \in \mathbb{Z}\}$ *ist die Menge aller Lösungen für die Gleichung* $ax_1+bx_2 = d$.

(b) $L = \{(u+x\frac{b}{d} - ys\frac{c}{g}, v - x\frac{a}{d} - yt\frac{c}{g}, w + y\frac{d}{g}) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$ *ist die Menge aller Lösungen für die Gleichung* $ax_1 + bx_2 + cx_3 = g$.

Beweis:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} a(s + x\frac{b}{d}) + b(t - x\frac{a}{d}) &= as + x\frac{ab}{d} + bt - x\frac{ab}{d} \\ &= as + bt \\ &= d. \end{aligned}$$

Demnach lösen die Elemente aus L die Gleichung $ax_1 + bx_2 = d$. Es bleibt zu zeigen, dass es nur die in L beschriebenen Lösungen für die Gleichung gibt. Sei also (y_1, y_2) eine beliebige Lösung. Dann gilt $ay_1 + by_2 = d$ und damit $a(y_1 - s) + b(y_2 - t) = 0$. Also gilt $\frac{a}{d}(y_1 - s) = \frac{b}{d}(t - y_2)$. Da $\mathrm{ggT}(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}) = 1$ gilt, folgt $\frac{b}{d} \mid (y_1 - s)$ und $\frac{a}{d} \mid (t - y_2)$ und beide Divisionen haben den selben Quotienten x. Das ergibt $y_1 = x\frac{b}{d} + s$ und $y_2 = -x\frac{a}{d} + t$ wie gewünscht.

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} & a(u + x\frac{b}{d} - ys\frac{c}{g}) + b(v - x\frac{a}{d} - yt\frac{c}{g}) + c(w + y\frac{d}{g}) \\ = \; & au + x\frac{ab}{d} - ys\frac{ac}{g} + bv - x\frac{ab}{d} - yt\frac{cb}{g} + cw + y\frac{cd}{g} \\ = \; & au - y\frac{c(as + bt)}{g} + bv + cw + y\frac{cd}{g} \\ = \; & au - y\frac{c(d)}{g} + bv + cw + y\frac{cd}{g} \\ = \; & au + bv + cw \\ = \; & g. \end{aligned}$$

Damit lösen die Elemente aus L die Gleichung $ax_1+bx_2+cx_3 = g$. Es bleibt zu zeigen, dass die Gleichung nur die in L beschriebenen Lösungen hat. Sei also (y_1, y_2, y_3) eine beliebige Lösung und definiere $y_1' = y_1 - u$, $y_2' = y_2 - v$ und $y_3' = y_3 - w$. Dann gilt $ay_1' + by_2' + cy_3' = 0$ und damit, nach Lemma 2.2.1, $cy_3' = -(ay_1' + by_2') = kd$ für ein $k \in \mathbb{Z}$. Da $\mathrm{ggT}(d, c) = g$ gilt, können wir die Gleichung durch g teilen und erhalten $\frac{c}{g}y_3' = k\frac{d}{g}$. Also gilt $\frac{d}{g} \mid y_3'$ und $y_3' = y\frac{d}{g}$ für ein $y \in \mathbb{Z}$. Dies ergibt einerseits

$$\begin{aligned} & y_3' &&= y\tfrac{d}{g} \\ \iff \; & y_3 - w &&= y\tfrac{d}{g} \\ \iff \; & y_3 &&= w + y\tfrac{d}{g}. \end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir $cy_3' = cy\frac{d}{g}$. Eingesetzt in die Gleichung $cy_3' = -(ay_1' + by_2')$ bedeutet dies

$$\begin{aligned} & cy\tfrac{d}{g} &&= -(ay_1' + by_2') \\ \iff \; & cy\tfrac{as+bt}{g} &&= -(ay_1' + by_2') \\ \iff \; & (ys\tfrac{c}{g})a + (yt\tfrac{c}{g})b &&= -y_1'a - y_2'b \\ \iff \; & (ys\tfrac{c}{g} + y_1')a + (yt\tfrac{c}{g} + y_2')b &&= 0. \end{aligned}$$

Damit löst $(y_1' + ys\frac{c}{g}, y_2' + yt\frac{c}{g})$ die Gleichung $ax_1 + bx_2 = 0$. Die Lösungen dieser Gleichung sind in (a) beschrieben. Mit $s = 0$ und $t = 0$ bekommen wir

$$\begin{array}{rll} & y_1' + ys\frac{c}{g} & = \; 0 + x\frac{b}{d} \\ \iff & y_1 - u + ys\frac{c}{g} & = \; x\frac{b}{d} \\ \iff & y_1 & = \; u - ys\frac{c}{g} + x\frac{b}{d} \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rll} & y_2' + yt\frac{c}{g} & = \; 0 - x\frac{a}{d} \\ \iff & y_2 - v + yt\frac{c}{g} & = \; -x\frac{a}{d} \\ \iff & y_2 & = \; v - yt\frac{c}{g} + x\frac{a}{d}. \end{array}$$

Insgesamt folgt nun, dass (y_1, y_2, y_3) wie gewünscht ein Element aus L ist.

□

Sei $\ll$ eine Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$. Eine mögliche Wohlordnung ist beispielsweise $0 \ll 1 \ll 2 \ll \ldots \ll -1 \ll -2 \ll \ldots$. Wir erweitern $\ll$ zu einer Wohlordnung auf Z^s lexikographisch.

Definition 2.2.3
Seien $a_1, \ldots, a_s \in \mathbb{Z}$, $d = \mathrm{ggT}(a_1, \ldots, a_s)$ und $L = \{(x_1, \ldots, x_s) \in \mathbb{Z}^s \mid a_1x_1 + \ldots + a_sx_s = d\}$. Dann enthält L bezüglich $\ll$ ein eindeutiges, minimales Element $(y_1, \ldots, y_s)$ und wir nennen $d = a_1y_1 + \ldots + a_sy_s$ die **kanonische Dekomposition** *von d.*

2.3 $\mathcal{T}$-Präsentationen

Ein zentrales Hilfsmittel in dieser Arbeit sind die $\mathcal{T}$-Präsentationen, eine spezielle Form der polyzyklischen, beziehungsweise nilpotenten Präsentationen. In diesem Abschnitt wiederholen wir die für diese Arbeit relevanten Ergebnisse. Diese Ergebnisse und mehr zu dem Thema findet man unter anderem in [13, Sec. 8.1-8.2], [16, Sec. 5.2, 5.4] und [17, Sec. 9].

Definition 2.3.1
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $l = \binom{n}{3}$. Sei $t = (t_{i,j,k} \mid 1 \leq i < j < k \leq n) \in \mathbb{Z}^l$. Eine Präsentation in n Erzeugern der Form

$$G(t) = \langle g_1, \ldots, g_n \mid [g_j, g_i] = g_{j+1}^{t_{i,j,j+1}} \cdots g_n^{t_{i,j,n}} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n \rangle$$

*nennen wir **$\mathcal{T}$-Präsentation**.*

Die durch diese Präsentation definierte Gruppe $G(t)$ ist endlich erzeugt und nilpotent von der Hirschlänge höchstens n.

Definition 2.3.2
*Eine $\mathcal{T}$-Präsentation heißt **konsistent**, wenn die dadurch definierte Gruppe $G(t)$ genau die Hirschlänge n hat.*

Damit definiert jede konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation in n Erzeugern eine $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge n.

Bemerkung 2.3.3
*Wenn die $\mathcal{T}$-Präsentation konsistent ist, gibt es für jedes Element $g \in G(t)$ genau ein n-Tupel $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{Z}^n$, so dass $g = g_1^{e_1} \cdots g_n^{e_n}$ gilt. Diese Darstellung von g bezeichnen wir als **Normalform**.*

Im weiteren Verlauf dieses Abschnitts werden wir zeigen, dass auch die Umkehrung gilt und jede $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge n von solch einer konsistenten $\mathcal{T}$-Präsentation in n Erzeugern definiert wird.

Sei dazu im Folgenden G eine $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge n. Damit hat G nach [16, 5.2.20] und [17, Seite 394] eine endliche Zentralreihe mit n unendlich zyklischen Faktoren

$$G = G_1 > G_2 > \cdots > G_n > G_{n+1} = \{1\}.$$

Da G_i/G_{i+1} zyklisch ist, gibt es ein $g_i \in G$, so dass $\langle g_i \rangle = G_i/G_{i+1}$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.

Definition 2.3.4
*Für eine $\mathcal{T}$-Gruppe G heißt $(g_1, \ldots, g_n)$ eine **$\mathcal{T}$-Sequenz**, wenn für alle $1 \leq i \leq n$ gerade $\langle g_i G_{i+1} \rangle = G_i/G_{i+1}$ gilt.*

Nach Konstruktion entspricht die Anzahl n der Elemente einer $\mathcal{T}$-Sequenz genau der Hirschlänge der zu Grunde liegenden $\mathcal{T}$-Gruppe. Sei $(g_1, \ldots, g_n)$ eine $\mathcal{T}$-Sequenz für die $\mathcal{T}$-Gruppe G. Dann heißt die durch $G_i := \langle g_i, \ldots, g_n \rangle$ definierte Zentralreihe die von $(g_1, \ldots, g_n)$ induzierte Zentralreihe.

Satz 2.3.5
Jede $\mathcal{T}$-Sequenz bestimmt eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation. Also kann jede $\mathcal{T}$-Gruppe über eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation definiert werden. Insbesondere gibt es zu jeder $\mathcal{T}$-Gruppe G der Hirschlänge n einen Vektor $t \in \mathbb{Z}^{\binom{n}{3}}$, so dass $G \cong G(t)$ gilt.

Beweis:
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge n und sei $(g_1, \ldots, g_n)$ eine $\mathcal{T}$-Sequenz für G. Dann liegt für $1 \leq i < j \leq n$ der Kommutator $[g_j, g_i]$ in der Untergruppe G_{j+1}. Damit hat die Normalform von $[g_j, g_i]$ für gewisse $t_{i,j,k} \in \mathbb{Z}$ die Darstellung $[g_j, g_i] = g_{j+1}^{t_{i,j,j+1}} \cdots g_n^{t_{i,j,n}}$. Diese Relationen liefern eine konsistente, definierende $\mathcal{T}$-Präsentation für G, vergleiche [13, Lemma 8.23]. □

Da je nach Typ einige Einträge aus dem Vektor t zwingend trivial sind, betrachten wir bei expliziten $\mathcal{T}$-Präsentationen meistens Vektoren $t \in \mathbb{Z}^l$ mit $l \leq \binom{n}{3}$.

Bemerkung 2.3.6
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe.

(a) *Eine $\mathcal{T}$-Sequenz von G verfeinert eine Zentralreihe mit torsionsfreien Faktoren, wenn die von dieser $\mathcal{T}$-Sequenz induzierte Zentralreihe mit zyklischen Faktoren die gegebene Zentralreihe verfeinert.*

(b) *Zu jeder Zentralreihe $G = G_1 > G_2 > \cdots > G_l > G_{l+1} = \{1\}$ von G mit torsionsfreien Faktoren gibt es eine $\mathcal{T}$-Sequenz, die diese Reihe verfeinert.*

Kapitel 3

Eigenschaften von $\mathcal{T}$-Gruppen

Dieses Kapitel beleuchtet einige Aspekte der $\mathcal{T}$-Gruppen genauer und dient damit zur Vorbereitung der Klassifikation.

3.1 Isomorphismen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Isomorphismen zwischen zwei $\mathcal{T}$-Gruppen G und H. Unser Ziel ist es, einen solchen Isomorphismus mit Hilfe einer korrespondierenden Matrix zu beschreiben.
Nach Abschnitt 2.3 oder [16, Seite 137] hat eine $\mathcal{T}$-Gruppe eine Zentralreihe mit torsionsfreien Faktoren. Des Weiteren gibt es nach Bemerkung 2.3.6 für jede Zentralreihe mit dieser Eigenschaft eine $\mathcal{T}$-Sequenz, die diese Reihe verfeinert. Zentralreihen von G und H bezeichnen wir als korrespondierend, wenn sie dieselbe Länge l haben und jeder Isomorphismus $\varphi : G \to H$ für $1 \leq i \leq l$ die Bedingung $\varphi(G_i) = H_i$ erfüllt. Seien nun

$$G = G_1 > \cdots > G_l > G_{l+1} = \{1\} \text{ und } H = H_1 > \cdots > H_l > H_{l+1} = \{1\}$$

korrespondierende Zentralreihen von G und H mit torsionsfreien Faktoren. Des Weiteren seien $(g_1, \dots, g_n)$ und $(h_1, \dots, h_n)$ $\mathcal{T}$-Sequenzen von G und H, die diese Reihen verfeinern, und $\varphi : G \to H$ ein Isomorphismus. Dann können wir φ durch die Bilder $\varphi(g_i)$ mit $1 \leq i \leq n$ beschreiben. Diese Bilder liegen in H und werden damit von $h_1, \dots, h_n$ erzeugt. Das heißt, sie sind für gewisse $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ von der Form

$$\varphi(g_i) = h_1^{m_{i1}} \cdots h_n^{m_{in}}.$$

Damit korrespondiert φ zu einer Matrix $M_\varphi \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Da φ die Zentralreihe respektiert, ist M_φ eine obere Blockdiagonalmatrix von folgender Form

$$M_\varphi = \begin{pmatrix} M_1 & * & \dots & * \\ 0 & M_2 & & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & M_l \end{pmatrix},$$

wobei für jedes $i \in \{1, \ldots, l\}$ der Block M_i zu einem Isomorphismus zwischen den frei abelschen Gruppen G_i/G_{i+1} und H_i/H_{i+1} korrespondiert. Damit gilt $M_i \in \mathrm{GL}(r_i, \mathbb{Z})$, wobei r_i der Rang von G_i/G_{i+1} bzw. H_i/H_{i+1} ist. Diese Überlegungen fassen wir in folgendem Lemma zusammen.

Lemma 3.1.1
Sei $M \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ eine obere Blockdiagonalmatrix mit den Diagonalblöcken $M_1, \ldots, M_l$. Sei $\varphi : G \to H : g_i \mapsto w_i$ mit $w_i = h_1^{m_{i1}} \cdots h_n^{m_{in}}$ definiert durch die Einträge m_{ij} aus M. Sei $\{R_1, \ldots, R_k\}$ die Menge der definierenden Relationen von G in den Erzeugenden $g_1, \ldots, g_n$. Dann definiert φ genau dann einen Isomorphismus, wenn gilt

(a) $M_i \in \mathrm{GL}(r_i, \mathbb{Z})$ *für* $1 \le i \le l$ *und*
(b) $R_j(w_1, \ldots, w_n) = 1$ *für* $1 \le j \le k$.

Beweis:
" $\Longrightarrow$ ": Sei φ ein Isomorphismus. Da

$$\begin{aligned} 1 &= \varphi(1) \\ &= \varphi(R_j) \\ &= \varphi(g_{j_1}^{x_{j_1}} \cdots g_{j_s}^{x_{j_s}}) \\ &= \varphi(g_{j_1}^{x_{j_1}}) \cdots \varphi(g_{j_s}^{x_{j_s}}) \\ &= \varphi(g_{j_1})^{x_{j_1}} \cdots \varphi(g_{j_s})^{x_{j_s}} \\ &= w_{j_1}^{x_{j_1}} \cdots w_{j_s}^{x_{j_s}} \\ &= R_j(w_1, \ldots, w_n) \end{aligned}$$

mit $s \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$, $j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, n\}$ und $x_{j_1}, \ldots, x_{j_s} \in \mathbb{Z}$ gilt, genügen die Bilder unter φ den Relationen von G. Demnach ist (b) gezeigt. Nun sei $\pi_i : G_i \to G_i/G_{i+1}, 1 \le i \le l$ der kanonische Epimorphismus. Da φ die Zentralreihe respektiert, wird durch $\pi_i(g_j) \mapsto \pi_i(\varphi(g_j))$ für jedes $i \in \{1, \ldots, n\}$ ein Isomorphismus von G_i/G_{i+1} nach H_i/H_{i+1} induziert. Damit hat M invertierbare Blöcke auf der Diagonalen wie in (a) gefordert.
" $\Longleftarrow$ ": Seien nun (a) und (b) gegeben. Dann besagt (b), dass die Bilder $w_1, \ldots, w_n$ die definierenden Relationen von G erfüllen. Insbesondere gilt, dass für jedes $i \in \{1, \ldots, l\}$ die Bilder der Erzeuger von G_i die definierenden Relationen von G_i erfüllen. Damit sind φ und $\varphi_i : G_i \to H_i$ Homomorphismen. Nach (a) ist M_l invertierbar, folglich ist φ_l ein Isomorphismus. Da nach (a) alle Blöcke invertierbar sind, liefert Induktion über i für $i = l$ bis $i = 1$, dass alle φ_i und damit $\varphi = \varphi_1$ Isomorphismen sind. □

Diese korrespondierenden Matrizen benutzen wir im Folgenden, um Isomorphismen zwischen $\mathcal{T}$-Gruppen zu beschreiben. Dabei sollte man bedenken, dass die Komposition von Automorphismen nicht der Matrixmultiplikation entspricht.

3.2 Hall Polynome

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, eine Multiplikationsvorschrift für die $\mathcal{T}$-Gruppen der Hirschlänge höchstens 5 anzugeben. Dazu betrachten wir eine beliebige $\mathcal{T}$-Gruppe G mit einer $\mathcal{T}$-Sequenz $(g_1, \ldots, g_n)$. Mit $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ lässt sich jedes Element $h \in G$ eindeutig schreiben als $h = g^a = g_1^{a_1} \cdots g_n^{a_n}$, siehe auch [13, Lemma 8.3]. Das heißt, für die Multiplikation in G gilt

$$g^a g^b = g^{p(a,b)}$$

mit $a, b \in \mathbb{Z}^n$ und $p(a,b) = (p_1(a,b), \dots, p_n(a,b))$. Nach Hall [11, 12] kann jeder Exponent $p_i(a,b)$ durch ein Polynom in den Einträgen von a und b dargestellt werden. Diese bezeichnen wir im weiteren Verlauf als ***Hall Polynome***. Ihre Berechnung für $\mathcal{T}$-Gruppen der Hirschlänge höchstens 5 erfolgt, mit Hilfe des Ansatzes aus [17, Seite 441ff], im anschließenden Satz, siehe auch [4].

Satz 3.2.1
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge 5 und sei $(g_1, \dots, g_5)$ eine $\mathcal{T}$-Sequenz. Dann haben die nicht-trivialen Relationen dieser $\mathcal{T}$-Präsentation für gewisse $t_{ijk} \in \mathbb{Z}$ folgende Form

$$\begin{aligned} g_2g_1 &= g_1g_2g_3^{t_{123}}g_4^{t_{124}}g_5^{t_{125}}, \\ g_3g_1 &= g_1g_3g_4^{t_{134}}g_5^{t_{135}}, \\ g_3g_2 &= g_2g_3g_4^{t_{234}}g_5^{t_{235}}, \\ g_4g_1 &= g_1g_4g_5^{t_{145}}, \\ g_4g_2 &= g_2g_4g_5^{t_{245}}, \\ g_4g_3 &= g_3g_4g_5^{t_{345}}. \end{aligned}$$

Mit $s_2(x) = x(x-1)/2$ und $s_3(x) = x(x-1)(x-2)/6$, lassen sich die zugehörigen Hall Polynome wie folgt beschreiben

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 + b_1, \\ p_2 &= a_2 + b_2, \\ p_3 &= a_3 + b_3 + t_{123}a_2b_1, \\ p_4 &= a_4 + b_4 + t_{124}a_2b_1 + t_{134}a_3b_1 + t_{234}a_3b_2 \\ &\quad + t_{123}t_{134}a_2s_2(b_1) + t_{123}t_{234}s_2(a_2)b_1 + t_{123}t_{234}a_2b_1b_2, \\ p_5 &= a_5 + b_5 + t_{345}a_4b_3 + t_{245}a_4b_2 + t_{235}a_3b_2 + t_{145}a_4b_1 + t_{135}a_3b_1 + t_{125}a_2b_1 \\ &\quad + t_{234}t_{345}s_2(a_3)b_2 + t_{234}t_{245}a_3s_2(b_2) + t_{134}t_{345}s_2(a_3)b_1 + t_{134}t_{145}a_3s_2(b_1) \\ &\quad + t_{234}t_{345}a_3b_2b_3 + t_{134}t_{345}a_3b_1b_3 + t_{134}t_{245}a_3b_1b_2 + t_{124}t_{345}a_2b_1b_3 + t_{124}t_{345}a_2a_3b_1 \\ &\quad + (s_2(t_{123})t_{234}t_{345} + t_{123}t_{235} + t_{124}t_{245})a_2b_1b_2 \\ &\quad + (s_2(t_{123})t_{234}t_{345} - t_{123}t_{234}t_{345} + t_{123}t_{124}t_{345} + t_{123}t_{235} + t_{124}t_{245})s_2(a_2)b_1 \\ &\quad + (s_2(t_{123})t_{134}t_{345} + t_{123}t_{124}t_{345} + t_{123}t_{135} + t_{124}t_{145})a_2s_2(b_1) \\ &\quad + t_{123}t_{234}t_{345}s_2(a_2)b_1b_3 + t_{123}t_{234}t_{345}s_2(a_2)a_3b_1 + t_{123}t_{234}t_{245}a_2b_1s_2(b_2) \\ &\quad + t_{123}t_{234}t_{345}a_2b_1b_2b_3 + t_{123}t_{234}t_{345}a_2a_3b_1b_2 + t_{123}t_{134}t_{345}a_2s_2(b_1)b_3 \\ &\quad + t_{123}t_{134}t_{345}a_2a_3s_2(b_1) \\ &\quad + (2t_{123}^2t_{134}t_{345} + 3t_{123}^2t_{234}t_{345} + 2t_{123}t_{124}t_{345} + t_{123}t_{134}t_{245})s_2(a_2)s_2(b_1) \\ &\quad + (2t_{123}^2t_{234}t_{345} + t_{123}t_{234}t_{245})s_3(a_2)b_1 + (t_{123}^2t_{134}t_{345} + t_{123}t_{134}t_{145})a_2s_3(b_1) \\ &\quad + (t_{123}^2t_{234}t_{345} + t_{123}t_{234}t_{245})s_2(a_2)b_1b_2 + (t_{123}^2t_{234}t_{345} + t_{123}t_{134}t_{245})a_2s_2(b_1)b_2 \\ &\quad + 4t_{123}^2t_{234}t_{345}s_3(a_2)s_2(b_1) + 3t_{123}^2t_{134}t_{345}s_2(a_2)s_3(b_1) \\ &\quad + 2t_{123}^2t_{234}t_{345}s_2(a_2)s_2(b_1)b_2. \end{aligned}$$

Beweis:
Seien g^a und g^b aus G. Um die Hall Polynome $p_1, \dots, p_5$ zu berechnen, ist es notwendig, das Produkt $g^ag^b = g_1^{a_1} \cdots g_5^{a_5} g_1^{b_1} \cdots g_5^{b_5}$ in die Normalform $g^ag^b = g_1^{p_1(a,b)} \cdots g_5^{p_5(a,b)}$ zu bringen. Die Schwierigkeit liegt hier bei der Vertauschung der Potenzen g_j^x und g_i^y. Also gilt es zunächst Polynome $r_{i,j,k}$ zu berechnen, so dass die Gleichung

$$g_j^x g_i^y = g_i^y g_j^x g_{j+1}^{r_{i,j,j+1}(x,y)} \cdots g_5^{r_{i,j,5}(x,y)}$$

für $1 \leq i < j \leq 5$ und alle $x, y \in \mathbb{Z}$ erfüllt ist. Diese Formeln können wir dann verwenden um die $g_i^{b_i}$ an den $g_j^{a_j}$ vorbeizuschieben. Diesen Vorgang nennt man "Collection", siehe auch [17, Seite 401].

Es ist bekannt, dass für eine beliebige Gruppe U mit $g, h \in U$ und $x \in \mathbb{Z}$ beliebig folgende Zusammenhänge gelten:

$$\begin{aligned}
(1)\ [[g,h],g] &= 1 \Rightarrow [g^x, h] = [g,h]^x,\\
(2)\ [[g,h],h] &= 1 \Rightarrow [g, h^x] = [g,h]^x,\\
(3)\ [[g,h],g] &= [[g,h],h] = 1 \Rightarrow (gh)^x = g^x h^x [g,h]^{s_2(x)}.
\end{aligned}$$

Da in allen betrachteten Gruppen $[g_4, g_i] \in \langle g_5 \rangle$ für $1 \leq i \leq 3$ gilt und g_5 zentral ist, folgt aus (1) und (2)

$$\begin{aligned}
g_4^x g_1^y &= g_1^y g_4^x [g_4^x, g_1^y]\\
&= g_1^y g_4^x [g_4, g_1^y]^x\\
&= g_1^y g_4^x [g_4, g_1]^{xy}\\
&= g_1^y g_4^x g_5^{xyt_{145}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_4^x g_2^y &= g_2^y g_4^x g_5^{xyt_{245}},\\
g_4^x g_3^y &= g_3^y g_4^x g_5^{xyt_{345}}.
\end{aligned}$$

Die Gleichungen für $g_3^x g_1^y$ und $g_3^x g_2^y$ berechnet man in zwei Schritten. Zunächst ergibt Induktion über y, dass gilt

$$(*) \quad g_3^{g_1^y} = g_3 g_4^{yt_{134}} g_5^{yt_{135} + s_2(y)t_{134}t_{145}}.$$

Denn für $y = 1$ ist die Gleichung erfüllt und unter der Annahme, dass dies auch für $y - 1$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
g_3^{g_1^y} &= (g_3^{g_1^{y-1}})^{g_1}\\
&= (g_3 g_4^{(y-1)t_{134}} g_5^{(y-1)t_{235} + s_2(y-1)t_{134}t_{145}})^{g_1}\\
&= g_3^{g_1} (g_4^{g_1})^{(y-1)t_{134}} (g_5^{g_1})^{(y-1)t_{135} + s_2(y-1)t_{134}t_{145}}\\
&= g_3 g_4^{t_{134}} g_5^{t_{135}} (g_4 g_5^{t_{145}})^{(y-1)t_{134}} g_5^{(y-1)t_{134} + s_2(y-1)t_{134}t_{145}}\\
&= g_3 g_4^{t_{134}} g_5^{t_{135}} g_4^{(y-1)t_{134}} g_5^{(y-1)t_{134}t_{145}} g_5^{(y-1)t_{135} + s_2(y-1)t_{134}t_{145}}\\
&= g_3 g_4^{yt_{134}} g_5^{yt_{135} + s_2(y-1)t_{134}t_{145} + (y-1)t_{134}t_{145}}\\
&= g_3 g_4^{yt_{134}} g_5^{yt_{135} + ((y-2)(y-1)/2)t_{134}t_{145} + (y-1)t_{134}t_{145}}\\
&= g_3 g_4^{yt_{134}} g_5^{yt_{135} + (y(y-1)/2)t_{134}t_{135}}\\
&= g_3 g_4^{yt_{134}} g_5^{yt_{135} + s_2(y)t_{134}t_{135}}.
\end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung liefert uns $g_3^{g_1^y} = g_3 g_4^{yt_{134}} g_5^{yt_{135} + s_2(y)t_{134}t_{145}}$ für negatives y.
Da $(g_3^x)^{g_1^y} = (g_3^{g_1^y})^x$ gilt, erhalten wir die gewünschte Gleichung durch das Potenzieren mit x. Zusammen mit $(*)$ und (3) ergibt dies dann

$$\begin{aligned}
(g_3^x)^{g_1^y} &= (g_3^{g_1^y})^x\\
&= (g_3 g_4^{yt_{134}} g_5^{yt_{135} + s_2(y)t_{134}t_{145}})^x\\
&= (g_3 g_4^{yt_{134}})^x g_5^{xyt_{135} + xs_2(y)t_{134}t_{145}}\\
&= g_3^x g_4^{xyt_{134}} [g_3, g_4]^{s_2(x)yt_{134}} g_5^{xyt_{135} + xs_2(y)t_{134}t_{145}}
\end{aligned}$$

$$= g_3^x g_4^{xyt_{134}} g_5^{s_2(x)yt_{134}t_{345}+xyt_{135}+xs_2(y)t_{134}t_{145}}.$$

Diese Berechnungen und die analoge Berechnungen für $g_3^x g_2^y$ liefern

$$\begin{aligned} g_3^x g_1^y &= g_1^y g_3^x g_4^{xyt_{134}} g_5^{s_2(x)yt_{134}t_{345}+xyt_{135}+xs_2(y)t_{134}t_{145}}, \\ g_3^x g_2^y &= g_2^y g_3^x g_4^{xyt_{234}} g_5^{s_2(x)yt_{234}t_{345}+xyt_{235}+xs_2(y)t_{234}t_{245}}. \end{aligned}$$

Wie in den Vorüberlegungen beschrieben, kann man nun die Hall Polynome für $G_2 = \langle g_2, \ldots, g_5 \rangle$ berechnen

$$\begin{aligned} g^a g^b &= g_2^{a_2} g_3^{a_3} g_4^{a_4} g_5^{a_5} g_2^{b_2} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\ &= g_2^{a_2} g_3^{a_3} g_2^{b_2} g_4^{a_4} g_5^{a_4 b_2 t_{245}} g_5^{a_5} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\ &= g_2^{a_2+b_2} g_3^{a_3} g_4^{a_3 b_2 t_{234}+a_4} g_5^{s_2(a_3)b_2t_{234}t_{345}+a_3b_2t_{235}+a_3s_2(b_2)t_{134}t_{245}} g_5^{a_4b_2t_{245}+a_5} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\ &= g_2^{a_2+b_2} g_3^{a_3+b_3} g_4^{a_3b_2t_{234}+a_4} g_5^{b_3a_3b_2t_{234}t_{345}+b_3a_4t_{345}} \\ &\quad g_5^{s_2(a_3)b_2t_{234}t_{345}+a_3b_2t_{235}+a_3s_2(b_2)t_{134}t_{245}+a_4b_2t_{245}+a_5} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\ &= g_2^{a_2+b_2} g_3^{a_3+b_3} g_4^{a_3b_2t_{234}+a_4+b_4} \\ &\quad g_5^{b_3a_3b_2t_{234}t_{345}+b_3a_4t_{345}+s_2(a_3)b_2t_{234}t_{345}+a_3b_2t_{235}+a_3s_2(b_2)t_{134}t_{245}+a_4b_2t_{245}+a_5+b_5}. \end{aligned}$$

Die Multiplikation in G_2 lässt sich demnach darstellen durch

$$g_2^{a_2} \cdots g_5^{a_5} \cdot g_2^{b_2} \cdots g_5^{b_5} = g_2^{f_2(a,b)} \cdots g_5^{f_5(a,b)}$$

mit

$$\begin{aligned} f_2(a,b) &= a_2 + b_2, \\ f_3(a,b) &= a_3 + b_3, \\ f_4(a,b) &= a_4 + b_4 + a_3 b_2 t_{234}, \\ f_5(a,b) &= a_5 + b_5 + a_3 b_2 t_{235} + a_4 b_2 t_{245} + a_4 b_3 t_{345} \\ &\quad + a_3 s_2(b_2) t_{234} t_{245} + s_2(a_3) b_2 t_{234} t_{345} + a_3 b_2 b_3 t_{234} t_{345}. \end{aligned}$$

Diese Multiplikationspolynome erlauben uns die Berechnung der folgenden Potenzierungspolynome für G_2

$$(g_2^{a_2} \cdots g_5^{a_5})^x = g_2^{k_2(a,x)} \cdots g_5^{k_5(a,x)}$$

mit

$$\begin{aligned} k_2(a,x) &= f_2(k_2(a,x-1),a) \\ &= k_2(a,x-1) + a_2 \\ &\vdots \\ &= k_2(a,1) + (x-1)a_2 \\ &= xa_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_3(a,x) &= f_3(k_3(a,x-1),a) \\ &= k_3(a,x-1) + a_3 \\ &\vdots \\ &= k_3(a,1) + (x-1)a_3 \\ &= xa_3, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
k_4(a,x) &= f_4(k_4(a,x-1),a) \\
&= k_4(a,x-1) + a_4 + k_3(a,x-1)a_2t_{234} \\
&= k_4(a,x-1) + a_4 + (x-1)a_3a_2t_{234} \\
&= k_4(a,x-2) + 2a_4 + (x-1+x-2)a_3a_2t_{234} \\
&\vdots \\
&= k_4(a,1) + (x-1)a_4 + ((x-1)x - \sum_{i=1}^{x-1} i)a_3a_2t_{234} \\
&= xa_4 + s_2(x)a_2a_3t_{234},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k_5(a,x) &= f_5(k_5(a,x-1)) \\
&= k_5(a,x-1) + a_5 + k_3(a,x-1)a_2t_{235} + k_4(a,x-1)a_2t_{245} \\
&\quad +k_4(a,x-1)a_3t_{345} + k_3(a,x-1)s_2(a_2)t_{234}t_{245} \\
&\quad +s_2(k_3(a,x-1))a_2t_{234}t_{345} + k_3(a,x-1)a_2a_3t_{234}t_{345} \\
&= k_5(a,x-1) + a_5 + (x-1)a_3a_2t_{235} + ((x-1)a_4 + s_2(x-1)a_2a_3t_{234})a_2t_{245} \\
&\quad +((x-1)a_4 + s_2(x-1)a_2a_3t_{234})a_3t_{345} + (x-1)a_3s_2(a_2)t_{234}t_{245} \\
&\quad +(a_3^2s_2(x-1) + (x-1)s_2(a_3))a_2t_{234}t_{345} + (x-1)a_3a_2a_3t_{234}t_{345} \\
&= k_5(a,x-2) + 2a_5 + (x-1+x+1)(a_2a_3t_{235} + a_2a_4t_{245} + a_3a_4t_{345}) \\
&\quad +(s_2(x-2) + s_2(x-2))(a_2^2a_3t_{234}t_{245} + a_2a_3^2t_{234}t_{345} + a_3^2a_2t_{234}t_{345}) \\
&\quad +(x-1+x-2)(s_2(a_3)a_2t_{234}t_{345} + a_2a_3^2t_{234}t_{345} + s_2(a_2)t_{234}t_{345}) \\
&= \cdots \\
&\vdots \\
&= k_5(a,1) + (x-1)a_5s_2(x)(a_2a_3t_{235} + a_2a_4t_{245} + a_3a_4t_{345}) \\
&\quad +s_3(x)(a_2^2a_3t_{234}t_{245} + a_2a_3^2t_{234}t_{345} + a_3^2a_2t_{234}t_{345}) \\
&\quad +s_2(x)(s_2(a_3)a_2t_{234}t_{345} + a_2a_3^2t_{234}t_{345} + s_2(a_2)t_{234}t_{345}) \\
&= xa_5 + s_2(x)(a_2a_3t_{235} + a_2a_4t_{245} + a_3a_4t_{345}) \\
&\quad +s_2(x)a_2a_3t_{234}(t_{245}((2x-1)a_2 - 3) + t_{345}((4x+1)a_3 - 3))/6.
\end{aligned}
$$

Dies ermöglicht uns nun die Berechnung der Gleichung für $g_2^x g_1^y$. Sie geschieht in zwei Schritten. Zunächst betrachten wir das Konjugat $g_2^{g_1^y}$ in der allgemeinen Form $g_2g_3^{r(y)}g_4^{s(y)}g_5^{t(y)}$ für Polynome $r(y), s(y), t(y)$. Diese bestimmen wir rekursiv mit Hilfe der Polynome $f_2, \ldots, f_5$ unter der Annahme, dass $r(y-1), s(y-1)$ und $t(y-1)$ bekannt seien.

$$
\begin{aligned}
(g_2)^{g_1^y} &= ((g_2)^{g_1^{y-1}})^{g_1} \\
&= (g_2g_3^{r(y-1)}g_4^{s(y-1)}g_5^{t(y-1)})^{g_1} \\
&= g_2^{g_1}(g_3^{g_1})^{r(y-1)}(g_4^{g_1})^{s(y-1)}(g_5^{g_1})^{t(y-1)} \\
&= g_2g_3^{t_{123}}g_4^{t_{124}}g_5^{t_{125}}g_3^{r(y-1)}g_4^{r(y-1)t_{134}}g_5^{s_2(r(y-1))t_{134}t_{345}+r(y-1)t_{135}}g_4^{s(y-1)}g_5^{s(y-1)t_{145}} \\
&\quad g_5^{t(y-1)} \\
&= (g_2g_3^{t_{123}}g_4^{t_{124}}g_5^{t_{125}})(g_3^{r(y-1)}g_4^{r(y-1)t_{134}+s(y-1)} \\
&\quad g_5^{s_2(r(y-1))t_{134}t_{345}+r(y-1)t_{135}+s(y-1)t_{145}+t(y-1)}) \\
&= g_2^{1+0}g_3^{t_{123}+r(y-1)}g_4^{t_{124}+r(y-1)t_{134}+s(y-1)} \\
&\quad g_5^{t_{125}+t(y-1)+s_2(r(y-1))t_{134}t_{345}+r(y-1)t_{135}+s(y-1)t_{145}+t_{124}r(y-1)t_{345}}.
\end{aligned}
$$

Wir erhalten folgende Zusammenhänge

$$\begin{aligned}
r(y) &= r(y-1)+t_{123},\\
s(y) &= s(y-1)+t_{124}+r(y-1)t_{134},\\
t(y) &= t(y-1)+t_{125}+s_2(r(y-1))t_{134}t_{345}+r(y-1)(t_{124}t_{345}+t_{135})+s(y-1)t_{145}.
\end{aligned}$$

Das Lösen der Rekursion ergibt

$$\begin{aligned}
r(y) &= r(y-1)+t_{123}\\
&= r(y-2)+t_{123}+t_{123}\\
&\vdots\\
&= r(1)+(y-1)t_{123}\\
&= yt_{123},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s(y) &= s(y-1)+t_{124}+(y-1)t_{123}t_{134}\\
&= s(y-2)+2t_{124}+(y-1+y-2)t_{123}t_{134}\\
&\vdots\\
&= s(1)+(y-1)t_{124}+((y-1)y-\sum_{i=1}^{y-1} i)t_{123}t_{134}\\
&= yt_{124}+(y(y-1)/2)t_{123}t_{134}\\
&= yt_{124}+s_2(y)t_{123}t_{134},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t(y) &= t(y-1)+t_{125}+(t_{123}^2s_2(y-1)+(y-1)s_2(t_{123}))t_{134}t_{345}\\
&\quad +(y-1)t_{123}(t_{124}t_{345}+t_{135})+(y-1)t_{124}t_{145}+s_2(y-1)t_{123}t_{134}t_{145}\\
&= t(y-2)+2t_{125}+(s_2(y-1)+s_2(y-2))t_{123}^2t_{134}t_{345}\\
&\quad +(y-1+y-2)s_2(t_{123})t_{134}t_{345}+(y-1+y-2)t_{123}(t_{124}t_{345}+t_{135})\\
&\quad +(y-1+y-2)t_{124}t_{145}+(s_2(y-1)+s_2(y-2))t_{123}t_{134}t_{145}\\
&= \cdots\\
&\vdots\\
&= t(1)+(y-1)t_{125}\\
&\quad +(y(y-1)/2)(s_2(t_{123})t_{134}t_{345}+t_{123}(t_{124}t_{345}+t_{135})+t_{124}t_{145})\\
&\quad +(\sum_{i=1}^{y-1} s_2(i))t_{123}t_{134}(t_{123}t_{345}+t_{145})\\
&= yt_{125}+s_2(y)(s_2(t_{123})t_{345}t_{134}+t_{123}(t_{124}t_{345}+t_{135})+t_{124}t_{145})\\
&\quad +s_3(y)t_{123}t_{134}(t_{123}t_{345}+t_{145}).
\end{aligned}$$

Nun erhalten wir durch Anwendung der Polynome $k_2,\ldots,k_5$

$$g_2^x g_1^y = g_1^y (g_2^{g_1^y})^x = g_1^y (g_2 g_3^{r(y)} g_4^{s(y)} g_5^{t(y)})^x = g_1^y g_2^x g_3^{R(x,y)} g_4^{S(x,y)} g_5^{T(x,y)}$$

mit

$$\begin{aligned}
R(x,y) &= xr(y) = xyt_{123},\\
S(x,y) &= xs(y)+s_2(x)r(y)t_{234}\\
&= xyt_{124}+xs_2(y)t_{123}t_{134}+s_2(x)yt_{123}t_{234},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T(x,y) &= xt(y)+s_2(x)(r(y)t_{235}+s(y)t_{245}+r(y)s(y)t_{345}) \\ &\quad +s_2(x)r(y)t_{234}(t_{245}((2x-1)-3)+t_{345}((4x+1)r(y)-3))/6. \end{aligned}$$

Also haben wir die gesuchten Polynome $r_{i,j,k}$ berechnet und können die Hall Polynome $p_1,\ldots,p_5$, wie am Anfang beschrieben, bestimmen

$$\begin{aligned}
g^a g^b &= g_1^{a_1} g_2^{a_2} g_3^{a_3} g_4^{a_4} g_5^{a_5} g_1^{b_1} g_2^{b_2} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
&= g_1^{a_1} g_2^{a_2} g_3^{a_3} g_1^{b_1} g_4^{a_4} g_5^{a_4 b_1 t_{145}} g_5^{a_5} g_2^{b_2} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
&= g_1^{a_1} g_2^{a_2} g_1^{b_1} g_3^{a_3} g_4^{a_3 b_1 t_{134}} g_5^{s_2(a_3) b_1 t_{134} t_{345} + a_3 b_1 t_{135} + a_3 s_2(b_1) t_{134} t_{145}} g_4^{a_4} g_5^{a_4 b_1 t_{145}} g_5^{a_5} \\
&\quad g_2^{b_2} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
&= g_1^{a_1+b_1} g_2^{a_2} g_3^{a_2 b_1 t_{123}} g_4^{a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234}} g_5^{T(a_2,b_1)} g_3^{a_3} g_4^{a_3 b_1 t_{134}} \\
&\quad g_5^{s_2(a_3) b_1 t_{134} t_{345} + a_3 b_1 t_{135} + a_3 s_2(b_1) t_{134} t_{145}} g_4^{a_4} g_5^{a_4 b_1 t_{145}} g_5^{a_5} g_2^{b_2} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
&= g_1^{a_1+b_1} g_2^{a_2} g_3^{a_2 b_1 t_{123}} g_4^{a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234}} g_3^{a_3} g_4^{a_3 b_1 t_{134} + a_4} \\
&\quad g_5^{T(a_2,b_1) + s_2(a_3) b_1 t_{134} t_{345} + a_3 b_1 t_{135} + a_3 s_2(b_1) t_{134} t_{145} + a_4 b_1 t_{145} + a_5} g_2^{b_2} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
&= g_1^{a_1+b_1} g_2^{a_2} g_3^{a_2 b_1 t_{123} + a_3} g_4^{a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234}} \\
&\quad g_5^{(a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234}) a_3 t_{345}} g_4^{a_3 b_1 t_{134} + a_4} \\
&\quad g_5^{T(a_2,b_1) + s_2(a_3) b_1 t_{134} t_{345} + a_3 b_1 t_{135} + a_3 s_2(b_1) t_{134} t_{145} + a_4 b_1 t_{145} + a_5} g_2^{b_2} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
&= g_1^{a_1+b_1} g_2^{a_2} g_3^{a_2 b_1 t_{123} + a_3} g_4^{a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234} + a_3 b_1 t_{134} + a_4} \\
&\quad g_5^{(a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234}) a_3 t_{345} + T(a_2,b_1) + s_2(a_3) b_1 t_{134} t_{345} + a_3 b_1 t_{135}} \\
&\quad g_5^{a_3 s_2(b_1) t_{134} t_{145} + a_4 b_1 t_{145} + a_5} g_2^{b_2} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
&= g_1^{a_1+b_1} g_2^{a_2} g_3^{a_2 b_1 t_{123} + a_3} g_2^{b_2} g_4^{a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234} + a_3 b_1 t_{134} + a_4} \\
&\quad g_5^{(a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234} + a_3 b_1 t_{134} + a_4) b_2 t_{245}} \\
&\quad g_5^{(a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234}) a_3 t_{345} + T(a_2,b_1) + s_2(a_3) b_1 t_{134} t_{345} + a_3 b_1 t_{135}} \\
&\quad g_5^{a_3 s_2(b_1) t_{134} t_{145} + a_4 b_1 t_{145} + a_5} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
&= g_1^{a_1+b_1} g_2^{a_2+b_2} g_3^{a_2 b_1 t_{123} + a_3} g_4^{(a_2 b_1 t_{123} + a_3) b_2 t_{234}} \\
&\quad g_5^{s_2(a_2 b_1 t_{123} + a_3) b_2 t_{234} t_{345} + (a_2 b_1 t_{123} + a_3) b_2 t_{235} + (a_2 b_1 t_{123} + a_3) s_2(b_2) t_{234} t_{245}} \\
&\quad g_4^{a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234} + a_3 b_1 t_{134} + a_4} \\
&\quad g_5^{(a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234} + a_3 b_1 t_{134} + a_4) b_2 t_{245}} \\
&\quad g_5^{(a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234}) a_3 t_{345} + T(a_2,b_1) + s_2(a_3) b_1 t_{134} t_{345} + a_3 b_1 t_{135}} \\
&\quad g_5^{a_3 s_2(b_1) t_{134} t_{145} + a_4 b_1 t_{145} + a_5} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
&= g_1^{a_1+b_1} g_2^{a_2+b_2} g_3^{a_2 b_1 t_{123} + a_3} \\
&\quad g_4^{(a_2 b_1 t_{123} + a_3) b_2 t_{234} + a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234} + a_3 b_1 t_{134} + a_4} \\
&\quad g_5^{s_2(a_2 b_1 t_{123} + a_3) b_2 t_{234} t_{345} + (a_2 b_1 t_{123} + a_3) b_2 t_{235} + (a_2 b_1 t_{123} + a_3) s_2(b_2) t_{234} t_{245}} \\
&\quad g_5^{(a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234} + a_3 b_1 t_{134} + a_4) b_2 t_{245}} \\
&\quad g_5^{(a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234}) a_3 t_{345} + T(a_2,b_1) + s_2(a_3) b_1 t_{134} t_{345} + a_3 b_1 t_{135}} \\
&\quad g_5^{a_3 s_2(b_1) t_{134} t_{145} + a_4 b_1 t_{145} + a_5} g_3^{b_3} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
&= g_1^{a_1+b_1} g_2^{a_2+b_2} g_3^{a_2 b_1 t_{123} + a_3 + b_3} \\
&\quad g_4^{(a_2 b_1 t_{123} + a_3) b_2 t_{234} + a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234} + a_3 b_1 t_{134} + a_4} \\
&\quad g_5^{((a_2 b_1 t_{123} + a_3) b_2 t_{234} + a_2 b_1 t_{124} + a_2 s_2(b_1) t_{123} t_{134} + s_2(a_2) b_1 t_{123} t_{234} + a_3 b_1 t_{134} + a_4) b_3 t_{345}} \\
&\quad g_5^{s_2(a_2 b_1 t_{123} + a_3) b_2 t_{234} t_{345} + (a_2 b_1 t_{123} + a_3) b_2 t_{235} + (a_2 b_1 t_{123} + a_3) s_2(b_2) t_{234} t_{245}}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& g_5^{(a_2b_1t_{124}+a_2s_2(b_1)t_{123}t_{134}+s_2(a_2)b_1t_{123}t_{234}+a_3b_1t_{134}+a_4)b_2t_{245}} \\
& g_5^{(a_2b_1t_{124}+a_2s_2(b_1)t_{123}t_{134}+s_2(a_2)b_1t_{123}t_{234})a_3t_{345}+T(a_2,b_1)+s_2(a_3)b_1t_{134}t_{345}+a_3b_1t_{135}} \\
& g_5^{a_3s_2(b_1)t_{134}t_{145}+a_4b_1t_{145}+a_5} g_4^{b_4} g_5^{b_5} \\
= \; & g_1^{a_1+b_1} g_2^{a_2+b_2} g_3^{a_2b_1t_{123}+a_3+b_3} \\
& g_4^{(a_2b_1t_{123}+a_3)b_2t_{234}+a_2b_1t_{124}+a_2s_2(b_1)t_{123}t_{134}+s_2(a_2)b_1t_{123}t_{234}+a_3b_1t_{134}+a_4+b_4} \\
& g_5^{(a_2b_1t_{123}+a_3)b_2t_{234}+a_2b_1t_{124}+a_2s_2(b_1)t_{123}t_{134}+s_2(a_2)b_1t_{123}t_{234}+a_3b_1t_{134}+a_4)b_3t_{345}} \\
& g_5^{s_2(a_2b_1t_{123}+a_3)b_2t_{234}t_{345}+(a_2b_1t_{123}+a_3)b_2t_{235}+(a_2b_1t_{123}+a_3)s_2(b_2)t_{234}t_{245}} \\
& g_5^{(a_2b_1t_{124}+a_2s_2(b_1)t_{123}t_{134}+s_2(a_2)b_1t_{123}t_{234}+a_3b_1t_{134}+a_4)b_2t_{245}} \\
& g_5^{(a_2b_1t_{124}+a_2s_2(b_1)t_{123}t_{134}+s_2(a_2)b_1t_{123}t_{234})a_3t_{345}+T(a_2,b_1)+s_2(a_3)b_1t_{134}t_{345}+a_3b_1t_{135}} \\
& g_5^{a_3s_2(b_1)t_{134}t_{145}+a_4b_1t_{145}+a_5+b_5}.
\end{aligned}
$$

Nach Einsetzen von $T(a_2, b_1)$ und Auflösen von $s_2(a_2b_1t_{123} + a_3)$ erhalten wir die im Satz beschriebenen Polynome $p_1, \ldots, p_5$. Da sich dieses Verfahren sehr gut in GAP [7] realisieren lässt, können wir diesen letzten Schritt auch mit Hilfe des Computers durchführen. Den Code dazu findet man in [4]. □

Damit haben wir die Multiplikation in $\mathcal{T}$-Gruppen einer Hirschlänge von höchstens 5 beschrieben. Für $\mathcal{T}$-Gruppen der Hirschlänge $n < 5$ sind die Multiplikationspolynome genau die Hall Polynome $p_1, \ldots, p_n$ aus Satz 3.2.1. Die dazugehörige $\mathcal{T}$-Präsentation erhält man aus der in Satz 3.2.1 beschriebenen $\mathcal{T}$-Präsentation durch Streichung von $g_{n+1}, \ldots, g_5$.

3.3 Konsistenz

Es ist zu beachten, dass die Präsentation aus Satz 3.2.1 nicht notwendigerweise konsistent ist. Deshalb ist es das Ziel dieses Abschnitts für $\mathcal{T}$-Gruppen der Hirschlänge von höchstens 5 Bedingungen zu formulieren, die eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation liefern. Zuerst müssen wir rekapitulieren wie eine solche Konsistenz überhaupt nachzuweisen ist. Da $\mathcal{T}$-Gruppen per Definition torsionsfrei sind, lässt sich aus [17, Sec. 9.4] und [3, Sec. 2.3] folgender Zusammenhang folgern.

Lemma 3.3.1
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe und P eine dazugehörige $\mathcal{T}$-Präsentation. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) *P ist konsistent.*

(b) *Die Wörter auf beiden Seiten der folgenden Gleichungen haben unter Berücksichtigung der Klammerung dieselbe Normalform*

(1) $$g_k(g_jg_i) = (g_kg_j)g_i,$$

(2) $$(g_jg_i^{-1})g_i = g_j,$$

für $i, j, k \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i < j < k$.

Satz 3.3.2
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge 5 mit $\mathcal{T}$-Sequenz $(g_1, \ldots, g_5)$. Dann haben die nicht-trivialen Relation dieser $\mathcal{T}$-Präsentation für gewisse $t_{ijk} \in \mathbb{Z}$ folgende Form

$$\begin{aligned}
g_2g_1 &= g_1g_2g_3^{t_{123}}g_4^{t_{124}}g_5^{t_{125}},\\
g_3g_1 &= g_1g_3g_4^{t_{134}}g_5^{t_{135}},\\
g_3g_2 &= g_2g_3g_4^{t_{234}}g_5^{t_{235}},\\
g_4g_1 &= g_1g_4g_5^{t_{145}},\\
g_4g_2 &= g_2g_4g_5^{t_{245}},\\
g_4g_3 &= g_3g_4g_5^{t_{345}}.
\end{aligned}$$

Diese Präsentation ist genau dann konsistent, wenn die t_{ijk} folgende Bedingungen erfüllen:

(a) $t_{123}t_{345} = 0$,

(b) $t_{124}t_{345} + t_{145}t_{234} = t_{134}t_{245}$.

Beweis:
Damit die gegebene Präsentation konsistent ist, müssen die Bedingungen aus Lemma 3.3.1 erfüllt sein. Man beachte, dass g_5 zentral ist und demnach $(g_5g_j)g_i = g_jg_5g_i = g_jg_ig_5 = (g_jg_i)g_5$ für alle $1 \leq i < j \leq 4$ gilt. Das heißt, es reicht die Gleichungen für $i, j, k \in \{1, \ldots, 4\}$ zu betrachten. Mit Hilfe der im letzten Abschnitt berechneten Hall Polynome erhalten wir für die Bedingung in Lemma 3.3.1(b)(1)

$$\begin{aligned}
(g_4g_3)g_2 &= g_3g_4g_5^{t_{345}}g_2\\
&= g_2g_3g_4^{1+t_{234}}g_5^{t_{235}+t_{245}},\\
g_4(g_3g_2) &= g_4g_2g_3g_4^{t_{234}}g_5^{t_{235}}\\
&= g_2g_3g_4^{1+t_{234}}g_5^{t_{235}+t_{245}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g_4g_3)g_1 &= g_3g_4g_5^{t_{345}}g_1\\
&= g_1g_3g_4^{1+t_{134}}g_5^{t_{135}+t_{145}+t_{345}},\\
g_4(g_3g_1) &= g_4g_1g_3g_4^{t_{134}}g_5^{t_{135}}\\
&= g_1g_3g_4^{1+t_{134}}g_5^{t_{135}+t_{145}+t_{345}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g_4g_2)g_1 &= g_2g_4g_5^{t_{245}}g_1\\
&= g_1g_2g_3^{t_{123}}g_4^{t_{124}+1}g_5^{t_{125}+t_{145}+t_{245}},\\
g_4(g_2g_1) &= g_4g_1g_2g_3^{t_{123}}g_4^{t_{124}}g_{t_{125}}\\
&= g_1g_2g_3^{t_{123}}g_4^{t_{124}+1}g_5^{t_{125}+t_{145}+t_{245}+t_{123}t_{345}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g_3g_2)g_1 &= g_2g_3g_4^{t_{234}}g_5^{t_{235}}g_1\\
&= g_1g_2g_3^{1+t_{123}}g_4^{t_{124}+t_{134}+t_{234}}g_5^{t_{125}+t_{135}+t_{235}+t_{124}t_{345}+t_{145}t_{234}},\\
g_3(g_2g_1) &= g_3g_1g_2g_3^{t_{123}}g_4^{t_{124}}g_{t_{125}}\\
&= g_1g_2g_3^{1+t_{123}}g_4^{t_{124}+t_{134}+t_{234}}g_5^{t_{125}+t_{135}+t_{235}+t_{134}t_{245}+t_{123}t_{134}t_{345}+t_{123}t_{234}t_{345}}.
\end{aligned}$$

Wir stellen fest, dass nur zwei Gleichungen keine Bedingungen an die Wahl der $t_{ijk} \in \mathbb{Z}$ stellen. Aus $(g_4g_2)g_1 = g_4(g_2g_1)$ folgt

$$(a)\ t_{123}t_{345} = 0$$

und aus $(g_3g_2)g_1 = g_3(g_2g_1)$ folgt

$$t_{124}t_{345} + t_{145}t_{234} = t_{134}t_{245} + t_{123}t_{134}t_{345} + t_{123}t_{234}t_{345}.$$

Da beide Gleichungen erfüllt sein müssen, reduziert die erste die zweite zu

$$(b)\ t_{124}t_{345} + t_{145}t_{234} = t_{134}t_{245}.$$

Es bleibt die Auswertung von Lemma 3.3.1(b)(2). Wir erhalten dabei Folgendes

$$\begin{aligned}
(g_4g_3^{-1})g_3 &= g_3^{-1}g_4g_5^{-1}g_3 \\
&= g_4, \\[1em]
(g_4g_2^{-1})g_2 &= g_2g_4g_5^{t_{245}}g_2 \\
&= g_4, \\[1em]
(g_4g_1^{-1})g_1 &= g_1g_4g_5^{t_{145}}g_1 \\
&= g_4, \\[1em]
(g_3g_2^{-1})g_2 &= g_2^{-1}g_3g_4^{-t_{234}}g_5^{t_{234}t_{245}-t_{235}}g_2 \\
&= g_3, \\[1em]
(g_3g_1^{-1})g_1 &= g_1^{-1}g_3g_4^{-t_{134}}g_5^{t_{134}t_{145}-t_{235}} \\
&= g_3, \\[1em]
(g_2g_1^{-1})g_1 &= g_1^{-1}g_2g_3^{-t_{123}}g_4^{t_{123}t_{134}-t_{124}} \\
&\quad g_5^{t_{123}t_{124}t_{345}-t_{123}t_{134}t_{145}-t_{123}^2t_{134}t_{345}/2-t_{123}t_{134}t_{345}/2+t_{123}t_{135}+t_{124}t_{145}-t_{125}}g_1 \\
&= g_2.
\end{aligned}$$

Diese Gleichungen gelten für alle $t_{ijk} \in \mathbb{Z}$ und ergeben damit keine neuen Bedingungen. Das heißt, die gegeben Präsentation ist genau dann konsistent, wenn (a) und (b) erfüllt sind. $\square$

Im Folgenden werden wir die zu betrachtenden $\mathcal{T}$-Gruppen durch eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation beschreiben.

Kapitel 4

Klassifikation der $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (2,1,1) und (3,1,1)

In diesem Kapitel klassifizieren wir die Gruppen vom Typ $(2,1,1)$ und vom Typ $(3,1,1)$, indem wir ihre kanonische Form angeben. Dazu untersuchen wir zuerst die Struktur dieser Gruppen.

4.1 Eigenschaften der $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (n,1,1)

Das folgende Lemma liefert einige generelle Eigenschaften der Gruppen vom Typ $(n,1,1)$ mit $n \geq 2$.

Lemma 4.1.1
Sei G eine Gruppe vom Typ $(n,1,1)$ und sei $C = C_G(I_2(G))$ der Zentralisator von $I_2(G)$. Dann gelten folgende Aussagen.

(a) *$I_2(G)$ ist frei abelsch vom Rang 2.*
(b) *C ist eine vollständig invariante Untergruppe von G und es gilt $G/C \cong \mathbb{Z}$.*
(c) *C hat Nilpotenzklasse höchstens 2 und $I_2(C)$ ist entweder gleich $I_2(G), I_3(G)$ oder $\{1\}$.*

Beweis:

(a) Die Faktoren $I_2(G)/I_3(G)$ und $I_3(G)/\{1\} \cong I_3(G)$ sind frei abelsch von Grad 1. Das heißt, $I_2(G)$ kann von zwei Elementen erzeugt werden, von denen eines in $I_3(G)$ liegt. Da die Untergruppe $I_3(G)$ nach Konstruktion zentral in G ist, ist $I_2(G)$ wie gefordert abelsch und damit frei abelsch vom Rang 2.

(b) Wie bereits in (a) gezeigt, kann $I_2(G)$ von zwei Elementen x und y erzeugt werden, wobei y in $I_3(G)$ liegt. Sei $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(I_2(G))$ der natürliche Homomorphismus, der durch die Konjugation von $I_2(G)$ mit G induziert wird. Da $I_2(G)$ nach (a) frei abelsch vom Rang 2 ist, gilt $\mathrm{Aut}(I_2(G)) \cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ bezüglich der Basis $\{x,y\}$. Darüber hinaus wissen wir, dass für alle $g \in G$ $x^g = xy^{\alpha_g}$ für ein $\alpha_g \in \mathbb{Z}$ und $y^g = y$ gilt. Das heißt $\varphi(g)$ entspricht der Matrix

$$M_{\varphi(g)} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demnach ist das Bild von G unter φ in der Untergruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen der $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ enthalten. Weiter impliziert der Typ von G, dass $I_2(G)$ nicht zentral ist. Damit finden wir Elemente $g \in G$, die nicht mit x kommutieren, für die also $\alpha_g \neq 0$ gilt. Das bedeutet, dass $\varphi(G)$ nicht trivial sein kann. In dem Zentralisator von $I_2(G)$ liegen genau die Elemente aus g, die mit x kommutieren und für die $M_{\varphi(G)}$ die Einheitsmatrix ist. Damit gilt $C = ker(\varphi)$. Der Homomorphiesatz liefert uns nun

$$G/C \cong Bild(\varphi) \cong \mathbb{Z}.$$

(c) Da C eine Untergruppe von G ist und G/C torsionsfrei ist, gilt $I_2(C) \leq I_2(G)$. Nehmen wir nun an, es gelte $I_2(G) > I_2(C) > \{1\}$ und $I_2(C) \neq I_3(G)$. Dann sind sowohl $I_2(C)$ als auch $I_3(G)$ zyklisch. Das heißt, es gibt $a, b \in G$, so dass $I_2(C) = \langle a \rangle$ und $I_3(G) = \langle b \rangle$ gilt. Da der Schnitt zweier Untergruppen von G nicht leer ist, gibt es ein $c \in G$ mit $c \in I_2(C) \cap I_3(G)$. Das bedeutet c lässt sich schreiben als $c = a^n = b^m$ für gewisse $n, m \in \mathbb{Z}$. Nehmen wir zuerst $n, m \neq 0$ an, das heißt c sei nicht trivial. Dann folgt $a^n \in I_3(G)$ und damit liefert die Isolatoreigenschaft $I_3(G) \subseteq I_2(C)$, weiter folgt $b^m \in I_2(C)$ und damit aus der Isolatoreigenschaft $I_2(C) \subseteq I_3(G)$. Insgesamt folgt $I_3(G) = I_2(C)$. Da dies ein Widerspruch zur Annahme ist, folgt $n = m = 0$ und damit $I_2(C) \cap I_3(G) = \{1\}$. Also gilt $I_2(G) = I_2(C) \times I_3(G)$. Das führt zu folgendem Zusammenhang

$$[G, I_2(G)] = [G, I_3(G)][G, I_2(C)] = [G, I_2(C)] \leq I_2(C) \cap I_3(G) = \{1\}$$

und liefert, dass $I_2(G)$ zentral ist. Dies widerspricht dem Typ von G. Damit ist die Annahme $I_2(C)$ sei nicht aus $\{I_2(G), I_3(G), \{1\}\}$ widerlegt. □

4.2 Die $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (2,1,1)

4.2.1 Die kanonische Form

Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2,1,1)$ und sei $C = C_G(I_2(G))$ der Zentralisator von $I_2(G)$. Wir wählen eine $\mathcal{T}$-Sequenz $(g_1, \ldots, g_4)$ für G, welche folgende Serie induziert

$$G > C > I_2(G) > I_3(G) > \{1\}.$$

Da C der Zentralisator von $I_2(G)$ ist und $C/I_2(G)$ nach Lemma 4.1.1(b) isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, hat G eine $\mathcal{T}$-Präsentation in $g_1, \ldots, g_4$, so dass g_2 und g_3 kommutieren. Die nicht-trivialen Relationen haben folgende Form

$$(\star) \qquad \begin{aligned} g_2 g_1 &= g_1 g_2 g_3^{t_{123}} g_4^{t_{124}}, \\ g_3 g_1 &= g_1 g_3 g_4^{t_{134}}. \end{aligned}$$

Es gilt $t_{ijk} \in \mathbb{Z}$ und der Typ von G liefert $t_{123} t_{134} \neq 0$. Satz 3.3.2 zu Folge ist die Präsentation $(\star)$ konsistent. Nach Satz 2.3.5 ist G damit isomorph zu einer $\mathcal{T}$-Gruppe $G(t)$ mit

$t = (t_{123}, t_{124}, t_{134}) \in \mathbb{Z}^3$. Nach Satz 3.2.1 ist die Multiplikation in $G(t)$ gegeben durch die Hallpolynome $p_1, \ldots, p_4$ mit

$$\begin{aligned}
p_1(a,b) &= a_1 + b_1,\\
p_2(a,b) &= a_2 + b_2,\\
p_3(a,b) &= a_3 + b_3 + t_{123}a_2b_1,\\
p_4(a,b) &= a_4 + b_4 + t_{124}a_2b_1 + t_{134}a_3b_1 + t_{123}t_{134}a_2s_2(b_1).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Polynome wollen wir nun eine kanonische Form für $G(t)$ und damit für G bestimmen. Dies führt uns zu einem der Hauptresultate dieses Kapitels.

Satz 4.2.1
Sei $G(t)$ eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2,1,1)$. Es gelten $d = \mathrm{ggT}(t_{123}, t_{134})$ und $e \in \ \mathrm{pref}((\pm t_{124}) \bmod d)$. Wir definieren

$$\begin{aligned}
T_{123} &= |t_{123}|,\\
T_{134} &= |t_{134}|,\\
T_{124} &= (et_{124}) \bmod d.
\end{aligned}$$

Dann ist $G(t)$ isomorph zu $G(T)$. Es gilt $\mathrm{Cf}(t) = T$ und $G(T)$ ist eine kanonische Form für den Isomorphietyp von $G(t)$.

Beweis:
Sei eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} \end{pmatrix}$$

mit $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ und $m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44} \in \{\pm 1\}$ gegeben. Dann gilt $M \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$. Sei $T = (T_{123}, T_{124}, T_{134}) \in \mathbb{Z}^3$. Dann korrespondiert eine solche Matrix nach Lemma 3.1.1 genau dann zu einem Isomorphismus $G(T) \to G(t)$, falls die durch M definierten Bilder die Relationen von $G(T)$ erfüllen. Dies können wir mit Hilfe der Hall Polynome überprüfen. Im Folgenden bezeichnen wir die Zeilen von M mit $m_1, \ldots, m_4$. Die Erzeugenden von $G(T)$ bezeichnen wir mit $\bar{g_1}, \ldots, \bar{g_4}$. Da g_4 zentral in $G(t)$ ist und $\langle g_2, g_3, g_4 \rangle$ abelsch ist, beziehungsweise $\bar{g_4}$ zentral in $G(T)$ ist und $\langle \bar{g_2}, \bar{g_3}, \bar{g_4} \rangle$ abelsch ist, brauchen wir nur die nicht-trivialen Relationen zu untersuchen. Betrachten wir zuerst die Gleichung

$$\varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_1}) = \varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_3})^{T_{123}}\varphi(\bar{g_4})^{T_{124}}.$$

Nun berechnen wir für beide Seiten dieser Gleichung die jeweilige Normalform. Dabei bekommen wir für die linke Seite folgendes Ergebnis

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_1}) &= g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}} g_4^{m_{24}} g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}}\\
&= g_1^{p_1(m_2,m_1)} g_2^{p_2(m_2,m_1)} g_3^{p_3(m_2,m_1)} g_4^{p_4(m_2,m_1)}\\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{22}+m_{12}} g_3^{m_{23}+m_{13}+m_{22}m_{11}t_{123}}\\
&\quad\; g_4^{m_{24}+m_{14}+m_{22}m_{11}t_{124}+m_{23}m_{11}t_{134}+m_{22}t_{123}t_{134}m_{11}(m_{11}-1)/2}.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite erhalten wir

$$\varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_3})^{T_{123}}\varphi(\bar{g_4})^{T_{124}} = g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}} g_4^{m_{24}} (g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}})^{T_{123}} (g_4^{m_{44}})^{T_{124}}$$

$$
\begin{aligned}
&= g_1^{p_1(m_1,m_2)} g_2^{p_2(m_1,m_2)} g_3^{p_3(m_1,m_2)} g_4^{p_4(m_1,m_2)} g_3^{m_{33}T_{123}} \\
&\quad g_4^{m_{34}T_{123}+m_{44}T_{124}} \\
&= g_1^{p_1(m_1,m_2)} g_2^{p_2(m_1,m_2)} g_3^{p_3(m_1,m_2)+m_{33}T_{123}} \\
&\quad g_4^{p_4(m_1,m_2)+m_{34}T_{123}+m_{44}T_{124}} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}+m_{22}} g_3^{m_{13}+m_{23}+m_{33}T_{123}} g_4^{m_{14}+m_{24}+m_{34}T_{123}+m_{44}T_{124}}.
\end{aligned}
$$

Damit haben wir die erste Relation ausgewertet. Nun betrachten wir die zweite Relation und erhalten folgende Gleichung

$$\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_1}) = \varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_4})^{T_{134}}.$$

Für die linke Seite berechnen wir

$$
\begin{aligned}
\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_1}) &= g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} \\
&= g_1^{p_1(m_3,m_1)} g_2^{p_2(m_3,m_1)} g_3^{p_3(m_3,m_1)} g_4^{p_4(m_3,m_1)} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{33}+m_{13}} g_4^{m_{34}+m_{14}+m_{33}m_{11}t_{134}}.
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite ergibt

$$
\begin{aligned}
\varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_4})^{T_{134}} &= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} (g_4^{m_{44}})^{T_{134}} \\
&= g_1^{p_1(m_1,m_3)} g_2^{p_2(m_1,m_3)} g_3^{p_3(m_1,m_3)} g_4^{p_4(m_1,m_3)} g_4^{m_{44}T_{134}} \\
&= g_1^{p_1(m_1,m_3)} g_2^{p_2(m_1,m_3)} g_3^{p_3(m_1,m_3)} g_4^{p_4(m_1,m_3)+m_{44}T_{134}} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}+m_{33}} g_4^{m_{14}+m_{34}+m_{44}T_{134}}.
\end{aligned}
$$

Da die Präsentation von $G(t)$ konsistent ist, ist die Normalform eindeutig. Das heißt, die Exponenten auf den linken Seiten der betrachteten Gleichungen müssen mit denen auf der rechten Seite übereinstimmen. Wir erhalten also folgende Zusammenhänge zwischen t und T

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad T_{123}m_{33} &&= t_{123}m_{11}m_{22}, \\
&(2) \quad T_{134}m_{44} &&= t_{134}m_{11}m_{33}, \\
&(3) \quad T_{124}m_{44} + T_{123}m_{34} &&= t_{124}m_{11}m_{22} + t_{134}m_{11}m_{23} + t_{134}t_{123}m_{11}m_{22}(m_{11}-1)/2, \\
& &&= t_{124}m_{11}m_{22} + t_{134}m_{11}m_{23} + t_{134}t_{123}m_{22}(1-m_{11})/2.
\end{aligned}
$$

Das Ziel dieser Rechnung ist eine Beschreibung der Elemente aus T in den Elementen aus t. Deshalb werden wir im nächsten Schritt die Elemente aus T auf den linken Seiten isolieren und gegebenenfalls bereits erfasste Elemente aus T durch ihre Darstellung in t ersetzen. Dies führt zu folgenden Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&(1) \quad T_{123} &&= t_{123}m_{11}m_{22}m_{33}, \\
&(2) \quad T_{134} &&= t_{134}m_{11}m_{33}m_{44}, \\
&(3) \quad T_{124} &&= t_{124}m_{11}m_{22}m_{44} - t_{123}m_{11}m_{22}m_{33}m_{44}m_{34} \\
& &&\quad +t_{134}(m_{11}m_{44}m_{23} + t_{123}m_{22}m_{44}(1-m_{11})/2).
\end{aligned}
$$

Aus der Bedingung $m_{ii} \in \{\pm 1\}$ für $1 \leq i \leq 4$ schließen wir $T_{123} \in \{\pm t_{123}\}$ beziehungsweise $T_{134} \in \{\pm t_{134}\}$. Für die kanonische Form wollen wir erreichen, dass beide den positiven Wert annehmen. Dazu definieren wir $S_1 = sign(t_{123})$ und $S_2 = sign(t_{134})$. Dann wählen wir m_{22} und m_{44} als

$$
\begin{aligned}
m_{22} &= m_{11}m_{33}S_1, \\
m_{44} &= m_{11}m_{33}S_2.
\end{aligned}
$$

Damit liefern die Gleichungen (1) und (2) die gewünschte Form für T_{123} und T_{134}. Gleichung (3) verändert sich dann wie folgt

$$\begin{aligned} T_{124} &= m_{11}S_1S_2t_{124} - m_{11}m_{33}S_1S_2m_{34}t_{123} \\ &\quad +(t_{123}S_1S_2(1-m_{11})/2 + m_{33}S_2m_{23})t_{134}. \end{aligned}$$

Da m_{34} und m_{23} frei wählbare Parameter aus $\mathbb{Z}$ sind, ergibt Lemma 2.2.1, dass die Summe $m_{33}S_2m_{23}t_{134} - m_{11}m_{33}S_1S_2m_{34}t_{123}$ für ein beliebiges $x \in \mathbb{Z}$ den Wert xd annehmen kann. Somit hat Gleichung (3) folgende Form

$$T_{124} = m_{11}S_1S_2t_{124} + t_{134}t_{123}S_1S_2(1-m_{11})/2 + xd.$$

Indem wir ausnutzen, dass d ein Teiler von t_{134} ist, können wir die Gleichung wie folgt reduzieren

$$T_{124} \equiv m_{11}S_1S_2t_{124} \bmod d.$$

Für die kanonische Form möchten wir erreichen, dass T_{124} minimal ist und einen positiven Wert hat. Dazu wählen wir $m_{11} = S_1S_2e$ und erhalten für T_{124} die gewünschte Form $(et_{124}) \bmod d$. Damit hat $G(T)$ die im Satz geforderte kanonische Form. □

Korollar 4.2.2
Gruppen vom Typ $(2,1,1)$ sind genau dann isomorph, wenn ihre kanonische Form übereinstimmt.

Damit löst der Algorithmus aus Satz 4.2.1 das Isomorphieproblem für $\mathcal{T}$-Gruppen des Typs $(2,1,1)$.

4.2.2 Die Automorphismengruppe

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Automorphismengruppe einer $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2,1,1)$ bezüglich ihrer in Satz 4.2.1 bestimmten kanonischen Form. Hierfür nutzen wir die Erkenntnisse aus Lemma 3.1.1.

Satz 4.2.3
Sei $G(T)$ eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2,1,1)$ in ihrer in Satz 4.2.1 beschriebenen kanonischen Form. Dann korrespondiert ein Automorphismus von $G(T)$ zu einer Matrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} f & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ 0 & s & m_{23} & m_{24} \\ 0 & 0 & fs & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{Z})$$

mit $f, s \in \{\pm 1\}$ und $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, so dass die Bedingung

$$m_{23} = (s(f-1)T_{124} + fT_{123}m_{34})/T_{134} - T_{123}s(f-1)/2 \in \mathbb{Z}$$

erfüllt ist.

Beweis:
Da ein Automorphismus von $G(T)$ natürlich insbesondere ein Isomorphismus $G(T) \to G(T)$ ist, haben wir hier den Spezialfall $t = T$ zu dem Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 4.2.1. Das

bedeutet eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} \end{pmatrix}$$

mit $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ und $m_{11}, m_{22}, m_{33}, m_{44} \in \{\pm 1\}$ liegt in $\mathrm{GL}(4, \mathbb{Z})$. Eine solche Matrix korrespondiert nach Lemma 3.1.1 genau dann zu einem Automorphismus von $G(T)$, falls die durch M definierten Bilder die Relationen von $G(T)$ erfüllen. Nach den Rechnungen aus dem Beweis von Satz 4.2.1 ist das äquivalent dazu, dass folgende Gleichungen erfüllt sind

$$\begin{array}{lrcl} (1) & T_{123}m_{33} & = & T_{123}m_{11}m_{22}, \\ (2) & T_{134}m_{44} & = & T_{134}m_{11}m_{33}, \\ (3) & T_{124}m_{44} + T_{123}m_{34} & = & T_{124}m_{11}m_{22} + T_{134}m_{11}m_{23} + T_{134}T_{123}m_{11}m_{22}(m_{11}-1)/2, \\ & & = & T_{124}m_{11}m_{22} + T_{134}m_{11}m_{23} + T_{134}T_{123}m_{22}(1-m_{11})/2. \end{array}$$

Dieses Gleichungssystem können wir umformen zu

$$\begin{array}{lrcl} (1) & T_{123}(m_{33} - m_{11}m_{22}) & = & 0, \\ (2) & T_{134}(m_{44} - m_{11}m_{33}) & = & 0, \\ (3) & T_{124}(1 - m_{11}m_{22}m_{44}) & = & -T_{123}m_{44}m_{34} \\ & & & +T_{134}(m_{11}m_{44}m_{23} + m_{22}m_{44}T_{123}(1-m_{11})/2). \end{array}$$

Wir definieren $f = m_{11}$ und $s = m_{22}$. Dann werden die Gleichungen (1) und (2) genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\begin{array}{rcl} m_{33} & = & fs, \\ m_{44} & = & fm_{33} = ffs = s. \end{array}$$

Diese Ersetzungen reduzieren Gleichung (3) zu

$$(*) \quad (1-f)T_{124} = -T_{123}sm_{34} + T_{134}(fsm_{23} + T_{123}(1-f)/2).$$

Nun gilt es die Paare $(m_{23}, m_{34}) \in \mathbb{Z}^2$ zu bestimmen, die diese Bedingungen erfüllen. Dazu lösen wir Gleichung $(*)$ nach dem freien Parameter m_{23} auf und bekommen

$$m_{23} = (s(f-1)T_{124} + fT_{123}m_{34})/T_{134} - T_{123}s(f-1)/2.$$

Dies ist genau die im Satz geforderte Bedingung. □

Bemerkung 4.2.4
Bei der Interpretation von Satz 4.2.3 muss man folgende Zusammenhänge beachten.

- *Der Typ von $G(T)$ impliziert $T_{134} \neq 0$. Damit ist die Bedingung an m_{23} wohldefiniert.*
- *Die Gleichung für m_{23} lässt sich nach Lemma 2.2.1 und dem Beweis von Satz 4.2.3 darstellen als $(1-f)T_{124} = kd$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Da Bemerkung 2.1.1 impliziert, dass $T_{124} \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor\}$ gilt, folgt $f = 1$ oder $T_{124} \in \{0, \frac{d}{2}\}$.*

Da wir für die Matrix M aus Satz 4.2.3 ganzzahlige Einträge fordern, ist die Bedingung an m_{23} nicht für alle $m_{34} \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Diesen Zusammenhang wollen wir noch genauer untersuchen.

Lemma 4.2.5

Seien $G(T)$ und M wie in Satz 4.2.3 und gelte zusätzlich $d = \mathrm{ggT}(T_{123}, T_{134}) = u_1T_{123} + u_2T_{134}$. Dann sind die Bedingungen $m_{23}, m_{34} \in \mathbb{Z}$ für $m_{23} = (s(f-1)T_{124} + fT_{123}m_{34})/T_{134} - T_{123}s(f-1)/2$ genau dann erfüllt, wenn einer der folgenden Fälle eintritt

(a) $T_{124} \neq \frac{d}{2}$ *und* $m_{34} = x\frac{T_{134}}{d}$,

(b) $T_{124} = \frac{d}{2}$ *und* $m_{34} = su_1\frac{(f-1)}{2} + sx\frac{T_{134}}{d}$,

wobei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt.

Beweis:

Offenbar ist m_{23} genau dann ganzzahlig, wenn der Term $s(f-1)T_{124} + fT_{123}m_{34}$ von T_{134} geteilt wird. Das heißt, es muss ein $k \in \mathbb{Z}$ geben so dass gilt

$$(1) \qquad kT_{134} = s(f-1)T_{124} + fT_{123}m_{34}.$$

(a) Sei zuerst $T_{124} \notin \{0, \frac{d}{2}\}$. Nach Bemerkung 4.2.4 folgt aus $T_{124} \notin \{0, \frac{d}{2}\}$, dass $f = 1$ gelten muss. Damit entfällt der Summand mit T_{124} und Gleichung (1) reduziert sich zu

$$k\frac{T_{134}}{d} = m_{34}\frac{T_{123}}{d}.$$

Diese Gleichung impliziert, dass der Parameter m_{23} genau dann ganzzahlig ist, wenn m_{34} ein beliebiges Vielfaches von $\frac{T_{134}}{d}$ ist. Sei nun $T_{124} = 0$. Dann entfällt ebenfalls der Summand mit T_{124} und wir erhalten analog zu dem ersten Fall

$$k\frac{T_{134}}{d} = fm_{34}\frac{T_{123}}{d}.$$

Auch diese Gleichung impliziert, dass der Parameter m_{23} genau dann ganzzahlig ist, wenn m_{34} ein beliebiges Vielfaches von $\frac{T_{134}}{d}$ ist. Der Wert von f ist hierbei irrelevant. Damit haben wir (a) abgehandelt.

(b) Sei nun $T_{124} = \frac{d}{2}$. Dann kann f die Werte 1 und -1 annehmen. Für $f = 1$ erhalten wir analog zu (a), dass m_{34} ein beliebiges Vielfaches von $\frac{T_{134}}{d}$ sein muss. Für $f = -1$ und $T_{124} = \frac{d}{2}$ reduziert sich Gleichung (1) zu

$$(*) \qquad k\frac{T_{134}}{d} = -s - m_{34}\frac{T_{123}}{d}.$$

Seien $u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass sie die Gleichung $d = u_1T_{123} + u_2T_{134}$ erfüllen. Sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann sind nach Lemma 2.2.2 alle Möglichkeiten d als Summe von Vielfachen von T_{123} und T_{134} zu beschreiben durch folgende Darstellung gegeben

$$\begin{array}{rrcl} & d & = & (u_1 - x\frac{T_{134}}{d})T_{123} + (u_2 + x\frac{T_{123}}{d})T_{134} \\ \Longleftrightarrow & 1 & = & (u_1 - x\frac{T_{134}}{d})\frac{T_{123}}{d} + (u_2 + x\frac{T_{123}}{d})\frac{T_{134}}{d} \\ \Longleftrightarrow & s & = & (su_1 - sx\frac{T_{134}}{d})\frac{T_{123}}{d} + (su_2 + sx\frac{T_{123}}{d})\frac{T_{134}}{d}. \end{array}$$

Die letzte Gleichung lässt sich wie folgt umformen

$$-(su_2 + sx\frac{T_{123}}{d})\frac{T_{134}}{d} = -s + (su_1 - sx\frac{T_{134}}{d})\frac{T_{123}}{d}.$$

Damit ist $(*)$ genau dann erfüllt, wenn

$$m_{34} \quad = \quad -(su_1 - sx\frac{T_{134}}{d})$$

$$= \quad su_1 + sx\frac{T_{134}}{d}$$

gilt. Da $s \in \{\pm 1\}$ und $x \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt, kann man über $sx\frac{T_{134}}{d}$ jedes beliebige Vielfache von $\frac{T_{134}}{d}$ darstellen. Damit gilt insgesamt für $f \in \{\pm 1\}$

$$m_{34} = su_1\frac{(f-1)}{2} + sx\frac{T_{134}}{d}$$

genau wie in (b) gefordert. Damit ist dieses Lemma bewiesen.

□

4.2.3 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir die theoretischen Erkenntnisse aus den letzten beiden Abschnitten auf einige konkrete Gruppen anwenden.

Beispiel 4.2.6
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2,1,1)$ und es gelte $G \cong G(t)$ mit $t = (-6,7,9)$. Dann hat G eine $\mathcal{T}$-Präsentation in Erzeugern $g_1 \ldots, g_4$, deren nicht-triviale Relationen folgende Form haben

$$\begin{aligned} g_2g_1 &= g_1g_2g_3^{-6}g_4^7 \\ g_3g_1 &= g_1g_3g_4^9. \end{aligned}$$

Nun wollen wir T so bestimmen, dass $G(T)$ die in Satz 4.2.1 beschriebene kanonische Form für diesen Isomorphietyp hat. Dazu berechnen wir $d = \mathrm{ggT}(-6,9) = 3$, $7 \bmod 3 = 1$ und $(-7) \bmod 3 = 2$. Es gilt $\mathrm{Min}(1,2) = 1$ und damit $e = 1$. Dies führt zu folgendem Ergebnis für T

$$\begin{aligned} T_{123} &= |-6| &&= 6, \\ T_{134} &= |9| &&= 9, \\ T_{124} &= 7 \bmod 3 &&= 1. \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathrm{Cf}(t) = (6,9,1)$ und G besitzt eine $\mathcal{T}$-Präsentation, deren nicht-triviale Relationen beschrieben sind durch

$$\begin{aligned} g_2g_1 &= g_1g_2g_3^6g_4, \\ g_3g_1 &= g_1g_3g_4^9. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Automorphismengruppe von $G(T)$. Es gilt offenbar $T_{124} = 1 \notin \{0, \frac{3}{2}\} = \{0, \frac{d}{2}\}$ und damit nach Bemerkung 4.2.4 die in Satz 4.2.3 beschriebene Form von M mit $f = 1$. Nach Lemma 4.2.5(a) gilt $m_{34} = \frac{9x}{3} = 3x$ und nach Satz 4.2.3 gilt $m_{23} = \frac{6m_{34}}{9} = 2x$, wobei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig ist. Damit korrespondiert ein Automorphismus von $G(T)$ zu folgender Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & s & 2x & * \\ 0 & 0 & s & 3x \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4,\mathbb{Z}),$$

wobei $*$ für ein beliebiges Element aus $\mathbb{Z}$ steht, $s \in \{\pm 1\}$ und $x \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt.

Betrachten wir nun eine Gruppe, die die Eigenschaft hat, dass in ihrer kanonischen Form $T_{124} = \frac{d}{2}$ gilt.

Beispiel 4.2.7
Sei $G \cong G(t)$ mit $t = (20, 6, -16)$. Nun wollen wir T so bestimmen, dass $G(T)$ die in Satz 4.2.1 beschriebene kanonische Form für diesen Isomorphietyp hat. Dazu berechnen wir $d = \mathrm{ggT}(20, -16) = 4$, $6 \bmod 4 = 2$ und $(-6) \bmod 4 = 2$. Es gilt $\mathrm{Min}(2, 2) = 2 = \frac{d}{2}$ und damit kann e sowohl den Wert 1 als auch den Wert -1 annehmen. Das heißt, es gilt

$$\mathrm{pref}((\pm 6) \bmod 4) = \{-1, 1\}.$$

Dies ist nach Bemerkung 2.1.1 nur im Fall $T_{124} \in \{0, \frac{d}{2}\}$ möglich und hat in diesem Typ keine Auswirkung auf die kanonische Form, wohl aber auf die Automorphismengruppe. Für T erhalten wir demnach

$$\begin{array}{rclcl} T_{123} & = & |20| & = & 20, \\ T_{134} & = & |-16| & = & 16, \\ T_{124} & = & 6 \bmod 4 & = & (-6) \bmod 4 = 2. \end{array}$$

Damit gilt $\mathrm{Cf}(t) = (20, 16, 2)$ und G besitzt eine $\mathcal{T}$-Präsentation, deren nicht-triviale Relationen beschrieben sind durch

$$\begin{array}{rcl} g_2 g_1 & = & g_1 g_2 g_3^{20} g_4^{2}, \\ g_3 g_1 & = & g_1 g_3 g_4^{16}. \end{array}$$

Betrachten wir nun die Automorphismengruppe von $G(T)$. Es gilt $T_{124} = 2 = d/2$ und man sieht leicht, dass die Gleichung $d = 4 = u_1 20 + u_2(-16)$ durch $u_1 = 1$ und $u_2 = 1$ erfüllt wird. Damit gilt nach Bemerkung 4.2.4 die in Satz 4.2.3 beschriebenen Form von M mit $f \in \{\pm 1\}$. Ebenfalls nach Satz 4.2.3 gilt

$$m_{23} = (2s(f-1) + 10s(1-f) + 80fsx)/16 - 10s(f-1).$$

Nach Lemma 4.2.5 (b) gilt für ein beliebiges $y \in \mathbb{Z}$

$$m_{34} = s(1-f)/2 + 4sx = s(1-f)/2 + 4y.$$

Der Übersichtlichkeit halber werden wir die Fälle $f = 1$ und $f = -1$ auf zwei Matrizen aufteilen. Damit korrespondiert ein Automorphismus von $G(T)$ zu einer der beiden folgenden Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & s & 5y & * \\ 0 & 0 & s & 4y \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Z})$$

oder

$$M_{-1} = \begin{pmatrix} -1 & * & * & * \\ 0 & s & 21s - 5y & * \\ 0 & 0 & -s & -s + 4y \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(4, \mathbb{Z}),$$

wobei $*$ für ein beliebiges Element aus $\mathbb{Z}$ steht, $s \in \{\pm 1\}$ und $y \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt.

Ein Vorteil der kanonischen Form ist die Lösung des Isomorphieproblems. Dazu betrachten wir noch ein kurzes Beispiel.

Beispiel 4.2.8
Seien die $\mathcal{T}$-Gruppen G_1, G_2 und G_3 vom Typ $(2,1,1)$ gegeben. Es gelte $G_1 \cong G(t_1), G_2 \cong G(t_2)$ und $G_3 \cong G(t_3)$ mit

$$\begin{aligned} t_1 &= (12, 5, -18), \\ t_2 &= (-12, 33, 18), \\ t_3 &= (-12, -7, -18). \end{aligned}$$

Wenn wir mit dem Algorithmus aus Satz 4.2.1 die kanonische Form bestimmen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Cf}(t_1) &= (12, 1, 18), \\ \mathrm{Cf}(t_2) &= (12, 3, 18), \\ \mathrm{Cf}(t_3) &= (12, 1, 18). \end{aligned}$$

Damit sind nach Korollar 4.2.2 G_1 und G_3 isomorph zueinander und G_2 ist nicht isomorph zu den anderen.

4.3 Die $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (3,1,1)

4.3.1 Die kanonische Form

Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(3,1,1)$ und sei $C = C_G(I_2(G))$ der Zentralisator von $I_2(G)$. Wir wählen eine $\mathcal{T}$-Sequenz $(g_1, \ldots, g_5)$ für G, welche folgende Serie verfeinert

$$G > C > I_2(G) > I_3(G) > \{1\}.$$

Nach Lemma 4.1.1(b) beziehungsweise (c) hat die Untergruppe C Hirschlänge 4 und Nilpotenzklasse höchstens 2. Damit impliziert der Typ von C, dass $I_2(C)$ entweder zyklisch oder trivial ist. Nun folgt aus Lemma 4.1.1(c), dass $I_2(C) \in \{I_3(G), \{1\}\}$ gilt. Darüber hinaus enthält $\langle g_3, g_4, g_5 \rangle$ die zentrale Untergruppe $\langle g_4, g_5 \rangle$ und ist demnach abelsch. Damit hat G eine $\mathcal{T}$-Präsentation in $g_1, \ldots, g_5$, so dass g_2 und g_4 beziehungsweise g_3 und g_4 kommutieren und der Kommutator von g_2 und g_3 in $\langle g_5 \rangle$ liegt. Die nicht-trivialen Relationen haben folgende Form

$$(\star) \qquad \begin{aligned} g_2 g_1 &= g_1 g_2 g_4^{t_{124}} g_5^{t_{125}}, \\ g_3 g_1 &= g_1 g_3 g_4^{t_{134}} g_5^{t_{135}}, \\ g_4 g_1 &= g_1 g_4 g_5^{t_{145}}, \\ g_3 g_2 &= g_2 g_3 g_5^{t_{235}}. \end{aligned}$$

Es gilt $t_{ijk} \in \mathbb{Z}$ und der Typ von G impliziert $t_{145} \neq 0$ und entweder $t_{124} \neq 0$ oder $t_{134} \neq 0$. Satz 3.3.2 zu Folge ist die Präsentation $(\star)$ konsistent. Nach Satz 2.3.5 ist G damit isomorph zu einer $\mathcal{T}$-Gruppe $G(t)$ mit $t = (t_{124}, t_{125}, t_{134}, t_{135}, t_{145}, t_{235}) \in \mathbb{Z}^6$. Nach Satz 3.2.1 ist die Multiplikation in $G(t)$ gegeben durch die Hallpolynome $p_1, \ldots, p_5$ mit

$$\begin{aligned} p_1(a,b) &= a_1 + b_1, \\ p_2(a,b) &= a_2 + b_2, \\ p_3(a,b) &= a_3 + b_3, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
p_4(a,b) &= a_4 + b_4 + t_{124}a_2b_1 + t_{134}a_3b_1,\\
p_5(a,b) &= a_5 + b_5 + t_{125}a_2b_1 + t_{135}a_3b_1 + t_{145}a_4b_1 + t_{235}a_3b_2\\
&\quad + t_{124}t_{145}a_2s_2(b_1) + t_{134}t_{145}a_3s_2(b_1).
\end{aligned}
$$

Damit wir mit Hilfe dieser Polynome nun eine kanonische Form für $G(t)$ und damit für G bestimmen können, brauchen wir noch ein paar technische Hilfsmittel, die wir in den folgenden Lemmata finden.

Lemma 4.3.1
Es gelte $a, b \in \mathbb{Z}$ und $g = \mathrm{ggT}(a,b)$. Seien $r_1, r_2, u_1, u_2 \in \mathbb{Z}$ mit

$$
\begin{aligned}
a &= r_1 g,\\
b &= r_2 g,\\
g &= u_1 a + u_2 b,\\
1 &= u_1 r_1 + u_2 r_2.
\end{aligned}
$$

Weiter definieren wir die Menge $L_{x,y}(a,b)$ wie folgt

$$
L_{x,y}(a,b) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} u_1 + xr_2 & -yr_2 \\ u_2 - xr_1 & yr_1 \end{pmatrix} \right| x \in \mathbb{Z}, y \in \{\pm 1\} \right\}.
$$

Dann gilt $(a,b)L = (g,0)$ für ein $L \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ genau dann, wenn L in der Menge $L_{x,y}(a,b)$ liegt.

Beweis:
Sei

$$
L = \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})
$$

mit $(a,b)L = (g,0)$ gegeben. Dann gelten folgende Gleichungen

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad a l_{11} + b l_{21} &&= g,\\
&(2)\quad a l_{12} + b l_{22} &&= 0,\\
&(3)\quad l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21} &&\in \{\pm 1\}.
\end{aligned}
$$

Mit Lemma 2.2.2 impliziert Gleichung (1), dass für einen Parameter $x \in \mathbb{Z}$ $l_{11} = u_1 + xr_2$ und $l_{22} = u_2 - xr_1$ gilt. Gleichung (2) ist äquivalent zu $g(r_1 l_{12} + r_2 l_{22}) = 0$ und dies ergibt

$$
l_{12} = \frac{-r_2 l_{22}}{r_1} = -r_2 \frac{l_{22}}{r_1}.
$$

Da r_1 und r_2 nach Konstruktion teilerfremd sind, muss l_{22} ein Vielfaches von r_1 sein und wir erhalten $l_{22} = yr_1$ und $l_{12} = -r_2 \frac{l_{22}}{r_1} = -yr_2$. Diese Ersetzungen geben der linken Seite von Gleichung (3) folgende Form

$$
\begin{aligned}
l_{11}l_{22} - l_{12}l_{21} &= (u_1 + xr_2)yr_1 + (u_2 - xr_1)yr_2\\
&= y((u_1 + xr_2)r_1 + (u_2 - xr_1)r_2\\
&= y(u_1 r_1 + u_2 r_2)\\
&= y.
\end{aligned}
$$

Das heißt, Gleichung (3) wird genau dann erfüllt, wenn $y \in \{\pm 1\}$ gilt. Damit erfüllt L genau dann die Bedingungen des Lemmas, wenn es die in $L_{x,y}(a,b)$ angegebene Form hat. □

Lemma 4.3.2
Für $a \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})}((a,0)) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ w & e \end{array} \right) \middle| w \in \mathbb{Z}, e \in \{\pm 1\} \right\}.$$

Beweis:
Dazu betrachten wir $X \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit

$$(a,0) = \left(\begin{array}{cc} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{array} \right) = (a,0).$$

Dies führt zu den beiden Gleichungen

$$\begin{array}{rcl} ax_{11} & = & a, \\ ax_{12} & = & 0. \end{array}$$

Damit erhalten wir $x_{11} = 1$ und $x_{12} = 0$. Darüber hinaus impliziert $X \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$, dass die Determinante in $\{\pm 1\}$ liegt. Das heißt $x_{11}x_{22} - x_{12}x_{21} = x_{22} - 0 = x_{22} \in \{\pm 1\}$.
Also hat der gesuchte Stabilisator, wie gewünscht, die Form

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})}((a,0)) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ w & e \end{array} \right) \middle| w \in \mathbb{Z}, e \in \{\pm 1\} \right\}.$$

□

Nun kommen wir zur kanonischen Form dieses Typs und damit zu einem der Hauptresultate dieses Kapitels.

Satz 4.3.3
Sei $G(t)$ eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(3,1,1)$. Es gelte

- $a = \mathrm{ggT}(t_{124}, t_{134})$,
- $L \in L_{x,y}(t_{124}, t_{134})$,
- $(l_1, l_2) = (t_{125}, t_{135})L$,
- $b = \mathrm{ggT}(t_{145}, t_{235})$,
- $c = \mathrm{ggT}(l_2, a, b)$,
- $e_1 \in \ \mathrm{pref}(\pm l_1 \bmod c)$,
- $e_2 \in \ \mathrm{pref}(\pm l_2 \bmod b)$.

Wir definieren

$$\begin{array}{rcl} T_{235} & = & |t_{235}|, \\ T_{145} & = & |t_{145}|, \\ T_{124} & = & a, \\ T_{134} & = & 0, \\ T_{135} & = & (e_2 l_2) \bmod b, \\ T_{125} & = & (e_1 l_1) \bmod c. \end{array}$$

Dann ist $G(t)$ isomorph zu $G(T)$. Es gilt $\mathrm{Cf}(t) = T$ und $G(T)$ ist eine kanonische Form für den Isomorphietyp von $G(t)$.

Beweis:
Sei eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} \end{pmatrix}$$

mit $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, Diagonalelementen $m_{11}, m_{44}, m_{55} \in \{\pm 1\}$ und

$$M_{22} = \begin{pmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$$

gegeben. Dann gilt $M \in GL(5, \mathbb{Z})$. Sei $T = (T_{124}, T_{125}, T_{134}, T_{135}, T_{145}, T_{235}) \in \mathbb{Z}^6$. Dann korrespondiert eine solche Matrix nach Lemma 3.1.1 genau dann zu einem Isomorphismus $G(T) \to G(t)$, falls die durch M definierten Bilder die Relationen von $G(T)$ erfüllen. Das können wir mit Hilfe der Hallpolynome überprüfen. Im Folgenden bezeichnen wir die Zeilen von M mit $m_1, \ldots, m_5$ und die Erzeugenden von $G(T)$ mit $\bar{g_1}, \ldots, \bar{g_5}$. Da g_5 zentral in $G(t)$ ist und $\langle g_3, g_4, g_5 \rangle$ abelsch ist, beziehungsweise $\bar{g_5}$ zentral in $G(T)$ ist und $\langle \bar{g_3}, \bar{g_4}, \bar{g_5} \rangle$ abelsch ist, brauchen wir nur die nicht-trivialen Relationen zu untersuchen. Betrachten wir zuerst die Gleichung

$$\varphi(\bar{g_4})\varphi(\bar{g_1}) = \varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_4})\varphi(\bar{g_5})^{T_{145}}.$$

Nun berechnen wir für beide Seiten dieser Gleichung die jeweilige Normalform. Dabei bekommen wir für die linke Seite folgendes Ergebnis

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{g_4})\varphi(\bar{g_1}) &= g_4^{m_{44}} g_5^{m_{45}} g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} \\ &= g_1^{p_1(m_4,m_1)} g_2^{p_2(m_4,m_1)} g_3^{p_3(m_4,m_1)} g_4^{p_4(m_4,m_1)} g_5^{p_5(m_4,m_1)} \\ &= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{44}+m_{14}} g_5^{m_{45}+m_{15}+t_{145}m_{44}m_{11}}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite ergibt

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_4})\varphi(\bar{g_5})^{T_{145}} &= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} g_4^{m_{44}} g_5^{m_{45}} g_5^{m_{55}T_{145}} \\ &= g_1^{p_1(m_1,m_4)} g_2^{p_2(m_1,m_4)} g_3^{p_3(m_1,m_4)} g_4^{p_4(m_1,m_4)} g_5^{p_5(m_1,m_4)} g_5^{m_{55}T_{145}} \\ &= g_1^{p_1(m_1,m_4)} g_2^{p_2(m_1,m_4)} g_3^{p_3(m_1,m_4)} g_4^{p_4(m_1,m_4)} g_5^{p_5(m_1,m_4)+m_{55}T_{145}} \\ &= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}+m_{44}} g_5^{m_{15}+m_{45}+m_{55}T_{145}}. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Relation ausgewertet. Nun betrachten wir die nächste Relation und erhalten folgende Gleichung

$$\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_2}) = \varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_5})^{T_{235}}.$$

Für die linke Seite berechnen wir

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_2}) &= g_2^{m_{32}} g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} g_5^{m_{35}} g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}} g_4^{m_{24}} g_5^{m_{25}} \\ &= g_2^{p_2(m_3,m_2)} g_3^{p_3(m_3,m_2)} g_4^{p_4(m_3,m_2)} g_5^{p_5(m_3,m_2)} \\ &= g_2^{m_{32}+m_{22}} g_3^{m_{33}+m_{23}} g_4^{m_34+m_{24}} g_5^{m_{35}+m_{25}+t_{235}m_{33}m_{22}}. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite erhalten wir

$$\begin{aligned} \varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_5})^{T_{235}} &= g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}} g_4^{m_{24}} g_5^{m_{25}} g_2^{m_{32}} g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} g_5^{m_{35}} g_5^{m_{55}T_{235}} \\ &= g_2^{p_2(m_2,m_3)} g_3^{p_3(m_2,m_3)} g_4^{p_4(m_2,m_3)} g_5^{p_5(m_2,m_3)} g_5^{m_{55}T_{235}} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= g_2^{p_2(m_2,m_3)} g_3^{p_3(m_2,m_3)} g_4^{p_4(m_2,m_3)} g_5^{p_5(m_2,m_3)+m_{55}T_{235}} \\
&= g_2^{m_{22}+m_{32}} g_3^{m_{23}+m_{33}} g_4^{m_24+m_{34}} g_5^{m_{25}+m_{35}+t_{235}m_{23}m_{32}+m_{55}T_{235}}.
\end{aligned}
$$

Als Nächstes betrachten wir die Relation

$$\varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_1}) = \varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_4})^{T_{124}}\varphi(\bar{g_5})^{T_{125}}.$$

Wir beginnen wieder mit der Auswertung der linken Seite

$$
\begin{aligned}
\varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_1}) &= g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}} g_4^{m_{24}} g_5^{m_{25}} g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} \\
&= g_1^{p_1(m_2,m_1)} g_2^{p_2(m_2,m_1)} g_3^{p_3(m_2,m_1)} g_4^{p_4(m_2,m_1)} g_5^{p_5(m_2,m_1)} \\
&\quad g_1^{m_{11}} g_2^{m_{22}+m_{12}} g_3^{m_{23}+m_{13}} g_4^{m_{24}+m_{14}+m_{22}m_{11}t_{124}+m_{23}m_{11}t_{134}} \\
&\quad g_5^{m_{25}+m_{15}+t_{125}m_{22}m_{11}+t_{135}m_{23}m_{11}+t_{145}m_{24}m_{11}+t_{235}m_{23}m_{12}} \\
&\quad g_5^{t_{124}t_{145}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2+t_{134}t_{145}m_{23}m_{11}(m_{11}-1)/2}.
\end{aligned}
$$

Für die rechte Seite erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_4})^{T_{124}}\varphi(\bar{g_5})^{T_{125}} &= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}} g_4^{m_{24}} g_5^{m_{25}} \\
&\quad (g_4^{m_{44}} g_5^{m_{45}})^{T_{124}} g_5^{m_{55}T_{125}} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}} g_4^{m_{24}} g_5^{m_{25}} \\
&\quad g_4^{T_{124}m_{44}} g_5^{T_{124}m_{45}} g_5^{T_{125}m_{55}} \\
&= g_1^{p_1(m_1,m_2)} g_2^{p_2(m_1,m_2)} g_3^{p_3(m_1,m_2)} g_4^{p_4(m_1,m_2)} g_5^{p_5(m_1,m_2)} \\
&\quad g_4^{T_{124}m_{44}} g_5^{T_{124}m_{45}+T_{125}m_{55}} \\
&= g_1^{p_1(m_1,m_2)} g_2^{p_2(m_1,m_2)} g_3^{p_3(m_1,m_2)} g_4^{p_4(m_1,m_2)+T_{124}m_{44}} \\
&\quad g_5^{p_5(m_1,m_2)+T_{124}m_{45}+T_{125}m_{55}} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}+m_{22}} g_3^{m_{13}+m_{23}} g_4^{m_{14}+m_{24}+T_{124}m_{44}} \\
&\quad g_5^{m_{15}+m_{25}+t_{235}m_{13}m_{22}+T_{124}m_{45}+T_{125}m_{55}}.
\end{aligned}
$$

Als letzte Relation betrachten wir

$$\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_1}) = \varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_4})^{T_{134}}\varphi(\bar{g_5})^{T_{135}}.$$

Die linke Seite der Gleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_1}) &= g_2^{m_{32}} g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} g_5^{m_{35}} g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} \\
&= g_1^{p_1(m_3,m_1)} g_2^{p_2(m_3,m_1)} g_3^{p_3(m_3,m_1)} g_4^{p_4(m_3,m_1)} g_5^{p_5(m_3,m_1)} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{32}+m_{12}} g_3^{m_{33}+m_{13}} g_4^{m_{34}+m_{14}+t_{124}m_{32}m_{11}+t_{134}m_{33}m_{11}} \\
&\quad g_5^{m_{35}+m_{15}+t_{125}m_{32}m_{11}+t_{135}m_{33}m_{11}+t_{145}m_{34}m_{11}+t_{235}m_{33}m_{12}} \\
&\quad g_5^{t_{124}t_{145}m_{32}m_{11}(m_{11}-1)/2+t_{134}t_{145}m_{33}m_{11}(m_{11}-1)/2}.
\end{aligned}
$$

Für die rechte Seite erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_3})\varphi(\bar{g_4})^{T_{134}}\varphi(\bar{g_5})^{T_{135}} &= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} g_2^{m_{32}} g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} g_5^{m_{35}} \\
&\quad (g_4^{m_{44}} g_5^{m_{45}})^{T_{134}} g_5^{m_{55}T_{135}} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} g_2^{m_{32}} g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} g_5^{m_{35}} \\
&\quad g_4^{m_{44}T_{134}} g_5^{m_{45}T_{134}} g_5^{m_{55}T_{135}} \\
&= g_1^{p_1(m_1,m_3)} g_2^{p_2(m_1,m_3)} g_3^{p_3(m_1,m_3)} g_4^{p_4(m_1,m_3)} g_5^{p_5(m_1,m_3)} \\
&\quad g_4^{m_{44}T_{134}} g_5^{m_{45}T_{134}+m_{55}T_{135}}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&= g_1^{p_1(m_1,m_3)} g_2^{p_2(m_1,m_3)} g_3^{p_3(m_1,m_3)} g_4^{p_4(m_1,m_3)+m_{44}T_{134}} \\
&\quad g_5^{p_5(m_1,m_3)+m_{45}T_{134}+m_{55}T_{135}} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}+m_{32}} g_3^{m_13+m_{33}} g_4^{m_{14}+m_{34}+m_{44}T_{134}} \\
&\quad g_5^{m_{15}+m_{35}+m_{13}m_{32}t_{235}+m_{45}T_{134}+m_{55}T_{135}}.
\end{aligned}$$

Da die Präsentation von $G(t)$ konsistent ist, ist die Normalform eindeutig. Das heißt, die Exponenten auf den linken Seiten der betrachteten Gleichungen müssen mit denen auf der rechten Seite übereinstimmen. Wir erhalten demnach folgende Zusammenhänge zwischen t und T

$$\begin{array}{lll}
(1) & T_{145}m_{55} & = t_{145}m_{11}m_{44}, \\
(2) & T_{235}m_{55} + t_{235}m_{23}m_{32} & = t_{235}m_{22}m_{33}, \\
(3) & T_{124}m_{44} & = m_{22}m_{11}t_{124} + m_{23}m_{11}t_{134}, \\
(\bar{3}) & T_{134}m_{44} & = t_{124}m_{32}m_{11} + t_{134}m_{33}m_{11}, \\
(4) & t_{235}m_{13}m_{22} + T_{124}m_{45} + T_{125}m_{55} & = t_{125}m_{22}m_{11} + t_{135}m_{23}m_{11} + t_{145}m_{24}m_{11} \\
 & & \quad +t_{235}m_{23}m_{12} + t_{124}t_{145}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2 \\
 & & \quad +t_{134}t_{145}m_{23}m_{11}(m_{11}-1)/2, \\
(\bar{4}) & t_{235}m_{13}m_{32} + T_{134}m_{45} + T_{135}m_{55} & = +t_{125}m_{32}m_{11} + t_{135}m_{33}m_{11} + t_{145}m_{34}m_{11} \\
 & & \quad +t_{235}m_{33}m_{12} + t_{124}t_{145}m_{32}m_{11}(m_{11}-1)/2 \\
 & & \quad +t_{134}t_{145}m_{33}m_{11}(m_{11}-1)/2.
\end{array}$$

Das Ziel dieser Rechnung ist eine Beschreibung der Elemente aus T in den Elementen aus t. Deshalb werden wir im nächsten Schritt die Elemente aus T auf den linken Seiten isolieren und gegebenenfalls bereits erfasste Elemente aus T durch ihre Darstellung in t ersetzen. Dies führt zu folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{llll}
(1) & T_{145} & = & t_{145}m_{11}m_{44}m_{55}, \\
(2) & T_{235} & = & t_{235}m_{55}(m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32}), \\
(3) & T_{124} & = & m_{11}m_{44}(m_{22}t_{124} + m_{23}t_{134}), \\
(\bar{3}) & T_{134} & = & m_{11}m_{44}(m_{32}t_{124} + m_{33}t_{134}), \\
(4) & T_{125} & = & m_{11}m_{55}(t_{125}m_{22} + t_{135}m_{23}) + t_{235}m_{55}(-m_{13}m_{22} + m_{23}m_{12}) \\
 & & & +t_{145}m_{55}(m_{24}m_{11} + (t_{124}m_{22} + t_{134}m_{23})(1-m_{11})/2) \\
 & & & -T_{124}m_{45}m_{55} \\
 & & = & m_{11}m_{55}(t_{125}m_{22} + t_{135}m_{23}) + t_{235}m_{55}(-m_{13}m_{22} + m_{23}m_{12}) \\
 & & & +t_{145}m_{55}(m_{24}m_{11} + (t_{124}m_{22} + t_{134}m_{23})(1-m_{11})/2) \\
 & & & -(m_{22}t_{124} + m_{23}t_{134})m_{11}m_{44}m_{55}m_{45}, \\
(\bar{4}) & T_{135} & = & m_{11}m_{55}(t_{125}m_{32} + t_{135}m_{33}) + t_{235}m_{55}(-m_{13}m_{32} + m_{33}m_{12}) \\
 & & & +t_{145}m_{55}(m_{34}m_{11} + (t_{124}m_{32} + t_{134}m_{33})(1-m_{11})/2) \\
 & & & -T_{134}m_{45}m_{55} \\
 & & = & m_{11}m_{55}(t_{125}m_{32} + t_{135}m_{33}) + t_{235}m_{55}(-m_{13}m_{32} + m_{33}m_{12}) \\
 & & & +t_{145}m_{55}(m_{34}m_{11} + (t_{124}m_{32} + t_{134}m_{33})(1-m_{11})/2) \\
 & & & -(m_{32}t_{124} + m_{33}t_{134})m_{11}m_{44}m_{55}m_{45}.
\end{array}$$

Wenn wir nun die Gleichungen (3) und ($\bar{3}$) beziehungsweise (4) und ($\bar{4}$) genauer untersuchen, stellen wir einen Zusammenhang fest. Deshalb werden wir sie im nächsten Schritt als eine Gleichung betrachten. Dies führt zu folgendem Gleichungssystem

$$\begin{array}{llcl}
(1) & T_{145} & = & t_{145}m_{11}m_{44}m_{55}, \\
(2) & T_{235} & = & t_{235}\det(M_{22})m_{55}, \\
(3) & (T_{124}, T_{134}) & = & (t_{124}, t_{134})m_{11}m_{44}M_{22}^T, \\
(4) & (T_{125}, T_{135}) & = & (t_{125}, t_{135})m_{11}m_{55}M_{22}^T \\
& & & +t_{145}m_{55}((m_{24}, m_{34})m_{11} + (t_{124}, t_{134})M_{22}^T(1 - m_{11})/2) \\
& & & +t_{235}(-m_{13}, m_{12})m_{55}M_{22}^T \\
& & & -(t_{124}, t_{134})m_{11}m_{44}m_{55}m_{45}M_{22}^T.
\end{array}$$

Aus den Bedingungen $m_{ii} \in \{\pm 1\}$ für $i \in \{1, 4, 5\}$ und $\det(M_{22}) \in \{\pm 1\}$, schließen wir $T_{145} \in \{\pm t_{145}\}$ beziehungsweise $T_{235} \in \{\pm t_{235}\}$. Für die kanonische Form wollen wir erreichen, dass beide den positiven Wert annehmen. Dazu definieren wir $S_3 = \operatorname{sign}(t_{145})$ und $S_4 \in \{\pm 1\}$ mit der Eigenschaft $S_4 = \operatorname{sign}(t_{235})$ für den Fall $t_{235} \neq 0$. Dann wählen wir m_{44} und m_{55} als

$$\begin{array}{rcl}
m_{55} & = & S_4 \det(M_{22}), \\
m_{44} & = & m_{11}m_{55}S_3 \\
& = & m_{11}S_3S_4\det(M_{22}).
\end{array}$$

Damit liefern die Gleichungen (1) und (2) die gewünschte Form für T_{145} und T_{235}. Gleichung (3) verändert sich dann wie folgt

$$(T_{124}, T_{134}) = (t_{124}, t_{134})S_3S_4\det(M_{22})M_{22}^T.$$

Wir wollen (t_{124}, t_{134}) in die Form $(a, 0)$ bringen. Wir suchen ein $L \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$, so dass diese Bedingung erfüllt ist. Nach Lemma 4.3.1 hat L genau dann die gewünschten Eigenschaften, wenn es in $L_{x,y}(t_{124}, t_{134})$ liegt. Mit den Notationen aus Lemma 4.3.1 erhalten wir

$$\begin{array}{rcl}
l_2 & = & -t_{125}yr_r + t_{135}yr_1 \\
& = & y(-t_{125}r_2 + t_{135}r_1), \\
l_1 & = & t_{125}(u_1 + xr_2) + t_{135}(u_2 - xr_1) \\
& = & t_{125}u_1 + t_{125}xr_2 + t_{135}u_2 - t_{135}xr_1 \\
& = & t_{125}u_1 + t_{135}u_2 - x(-t_{125}r_2 + t_{135}r_1) \\
& = & t_{125}u_1 + t_{135}u_2 - xyl_2.
\end{array}$$

Als weiteres Hilfsmittel brauchen wir den Stabilisator von $(a, 0)$ in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Dieser hat nach Lemma 4.3.2 folgende Form

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})}((a, 0)) = \left\{ \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ w & e \end{array} \right) \middle| w \in \mathbb{Z}, e \in \{\pm 1\} \right\}.$$

Wir wählen M_{22}^T als

$$M_{22}^T = S_3S_4\det(LN)LN$$

für ein $N \in \mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})}((a, 0))$. Nun rekapitulieren wir, dass für $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ und $x \in \mathbb{Z}$ folgender Zusammenhang gilt

$$\det(xA) = xa_{11}xa_{22} - xa_{12}xa_{21} = x^2\det(A).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{array}{rcl}
S_3S_4\det(M_{22})M_{22}^T & = & S_3S_4\det(S_3S_4\det(LN)LN)S_3S_4\det(LN)LN \\
& = & S_3S_4(S_3S_4\det(LN))^2\det(LN)S_3S_4\det(LN)LN \\
& = & S_3S_4\det(LN)S_3S_4\det(LN)LN \\
& = & S_3^2S_4^2\det(LN)^2LN \\
& = & LN.
\end{array}$$

Dies führt zu der gewünschten Form von T_{124} und T_{134}.

Es fehlt noch die Auswertung von Gleichung (4). Dazu betrachten wir den Summanden

$$t_{145}(m_{24}, m_{34})m_{11}m_{55} + t_{235}(-m_{13}, m_{12})m_{55}M_{22}^T.$$

Dieser enthält $m_{24}, m_{34}, m_{13}, m_{12}$ als freie Parameter und $M_{22}^T \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Damit folgt aus Lemma 2.2.1, dass der Summand den Wert (xb, yb) für beliebige $x, y \in \mathbb{Z}$ annimmt. Dies erlaubt uns Gleichung (4) modulo b in beiden Komponenten zu betrachten. Wir stellen fest, dass mit den bisherigen Ersetzungen von m_{44}, m_{55}, M_{22} und der Beschreibung von N durch die Parameter w und e Gleichung (4) modulo b sich wie folgt reduzieren lässt

$$\begin{aligned}
(T_{125}, T_{135}) &\equiv (t_{125}, t_{135})m_{11}S_4 \det(M_{22})M_{22}^T - (t_{124}, t_{134})S_3 m_{45} \det(M_{22})^2 M_{22}^T \\
&\equiv (t_{125}, t_{135})m_{11}S_3 LN - (t_{124}, t_{134})m_{45} \det(M_{22})S_4 LN \\
&\equiv m_{11}S_3(l_1, l_2)N - m_{45}S_4 \det(M_{22})(a, 0) \\
&\equiv m_{11}S_3 l_1 + m_{11}S_3 w l_2 - m_{45} \det(M_{22})S_4 a, m_{11}S_3 e l_2 \\
\mod\ & b.
\end{aligned}$$

Nun enthält die erste Komponente den Summanden $m_{11}S_3 w l_2 - m_{45} \det(M_{22})S_4 a$, wobei w und m_{45} frei wählbare Parameter aus $\mathbb{Z}$ sind. Nun ergibt Lemma 2.2.1, dass der Summand den Wert $z\mathrm{ggT}(l_2, a)$ für ein beliebiges $z \in \mathbb{Z}$ annimmt. An dieser Stelle sieht man, dass die Wahl von $S_4 \in \{\pm 1\}$ keinen Einfluss auf das Ergebnis nimmt. Sei c definiert als $c = \mathrm{ggT}(l_2, a, b)$. Dann reduziert sich Gleichung (4) zu

$$(T_{125}, T_{135}) \equiv (m_{11}S_3 l_1 \bmod c, m_{11}S_3 e l_2 \bmod b).$$

Die Matrix L ist aus der Menge $L_{x,y}(t_{124}, t_{134})$ beliebig gewählt. Das bedeutet l_1 und l_2 sind von $x \in \mathbb{Z}$ und $y \in \{\pm 1\}$ abhängig. Also müssen wir überprüfen, ob dies eine Auswirkung auf die kanonische Form hat. Dazu betrachten wir die beiden Ausdrücke aus Gleichung (4). Wir beginnen mit

$$\begin{aligned}
T_{125} &\equiv m_{11}S_3(t_{125}u_1 + t_{135}u_2 - xyl_2) \\
&\equiv m_{11}S_3(t_{125}u_1 + t_{135}u_2) - m_{11}S_3 xyl_2 \\
&\equiv m_{11}S_3(t_{125}u_1 + t_{135}u_2) \\
&\bmod c
\end{aligned}$$

und stellen fest, dass der von x abhängende Summand bei der Reduktion verschwindet.
Danach betrachten wir

$$\begin{aligned}
T_{135} &\equiv m_{11}S_3 e l_2 \\
&\equiv m_{11}S_3 e(-t_{125}yr_2 + t_{135}yr_1) \\
&\equiv m_{11}S_3 ey(-t_{125}r_2 + t_{135}r_1) \\
&\bmod b
\end{aligned}$$

und stellen fest, dass wir mit y zwar das Vorzeichen verändern können. Aber da das Produkt bereits einen freien Parameter aus $\{\pm 1\}$ enthält, kann die Wirkung von y neutralisiert werden und die Wahl von $L \in L_{x,y}(t_{124}, t_{134})$ hat keinen Einfluss auf die kanonische Form.
Damit bleiben als freie Parameter noch $m_{11}, e \in \{\pm 1\}$, um die zu den minimalen Werten gehörenden Vorzeichen zu erreichen. Mit den Definitionen für e_1 und e_2 aus dem Satz wählen wir diese als

$$m_{11} = e_1 S_3,$$

$$\begin{aligned} e &= m_{11}S_3e_2y \\ &= e_1S_3S_3e_2y \\ &= e_1e_2y. \end{aligned}$$

Dies führt zu der gewünschten Form von T_{125} und T_{135}. □

Bemerkung 4.3.4
Der Beweis von Satz 4.3.3 impliziert, dass die kanonische Form des Typs $(3,1,1)$ *eindeutig ist und nicht von der Wahl von L abhängt.*

Korollar 4.3.5
Gruppen vom Typ $(3,1,1)$ *sind genau dann isomorph, wenn ihre kanonische Form übereinstimmt.*

Damit löst der Algorithmus aus Satz 4.3.3 das Isomorphieproblem für $\mathcal{T}$-Gruppen des Typs $(3,1,1)$.

4.3.2 Die Automorphismengruppe

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Automorphismengruppe einer $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(3,1,1)$ bezüglich ihrer in Satz 4.3.3 bestimmten kanonischen Form. Hierfür nutzen wir die Erkenntnisse aus Lemma 3.1.1.

Satz 4.3.6
Sei $G(T)$ eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(3,1,1)$ in ihrer in Satz 4.3.3 beschriebenen kanonischen Form. Dann korrespondiert ein Automorphismus von $G(T)$ zu einer Matrix der Form

$$M = \begin{pmatrix} f & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 0 & s & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ 0 & 0 & 0 & sf & m_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \in GL(5,\mathbb{Z})$$

mit $f, s, m_{33} \in \{\pm 1\}$ und $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, so dass die Bedingungen

$$\begin{aligned} m_{33} &= 1 \quad \textit{oder} \quad T_{235} = 0 \\ m_{34} &= ((sf - m_{33})T_{135} - fm_{12}T_{235})/T_{145} \in \mathbb{Z} \textit{ und} \\ m_{45} &= (s(f-1)T_{125} + fT_{135}m_{23} + T_{235}(m_{12}m_{23} - sm_{13}) + fT_{145}m_{24})/T_{124} \\ &\quad + T_{145}s(1-f)/2 \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Beweis:
Da ein Automorphismus von $G(T)$ natürlich insbesondere ein Isomorphismus $G(T) \to G(T)$ ist, haben wir hier den Spezialfall $t = T$ zu dem Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 4.3.3. Das bedeutet eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} \end{pmatrix} \in GL(5,\mathbb{Z})$$

mit $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, Diagonalelementen $m_{11}, m_{44}, m_{55} \in \{\pm 1\}$ und

$$M_{22} = \begin{pmatrix} m_{22} & m_{23} \\ m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$$

liegt in $\mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$. Eine solche Matrix korrespondiert nach Lemma 3.1.1 genau dann zu einem Automorphismus von $G(T)$, falls die durch M definierten Bilder die Relationen von $G(T)$ erfüllen. Nach den Rechnungen aus dem Beweis von Satz 4.3.3 ist das äquivalent dazu, dass folgende Gleichungen erfüllt sind

$$\begin{array}{lll}
(1) & T_{145}m_{55} & = T_{145}m_{11}m_{44}, \\
(2) & T_{235}m_{55} + T_{235}m_{23}m_{32} & = T_{235}m_{22}m_{33}, \\
(3) & T_{124}m_{44} & = T_{124}m_{22}m_{11}, \\
(\bar{3}) & 0 & = T_{124}m_{32}m_{11}, \\
(4) & T_{235}m_{13}m_{22} + T_{124}m_{45} + T_{125}m_{55} & = T_{125}m_{22}m_{11} + T_{135}m_{23}m_{11} + T_{145}m_{24}m_{11} \\
 & & \quad +T_{235}m_{23}m_{12} + T_{124}T_{145}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2, \\
(\bar{4}) & T_{235}m_{13}m_{32} + T_{135}m_{55} & = +T_{125}m_{32}m_{11} + T_{135}m_{33}m_{11} + T_{145}m_{34}m_{11} \\
 & & \quad +T_{235}m_{33}m_{12} + T_{124}T_{145}m_{32}m_{11}(m_{11}-1)/2.
\end{array}$$

Wir rekapitulieren $m_{22}m_{33} - m_{23}m_{32} = \det(M_{22})$. Dann können wir dieses Gleichungssystem umformen zu

$$\begin{array}{lll}
(1) & T_{145}(m_{55} - m_{11}m_{44}) & = 0, \\
(2) & T_{235}(m_{55} - \det(M_{22})) & = 0, \\
(3) & T_{124}(m_{44} - m_{11}m_{22}) & = 0, \\
(\bar{3}) & T_{124}m_{32}m_{11} & = 0, \\
(4) & T_{124}m_{45} & = T_{125}(m_{22}m_{11} - m_{55}) + T_{135}m_{23}m_{11} + T_{145}m_{24}m_{11} \\
 & & \quad +T_{235}(m_{23}m_{12} - m_{13}m_{22}) + T_{124}T_{145}m_{22}(1-m_{11})/2, \\
(\bar{4}) & T_{145}m_{34}m_{11} & = -T_{125}m_{32}m_{11} + T_{135}(m_{55} - m_{33}m_{11}) \\
 & & \quad +T_{235}(m_{13}m_{32} - m_{33}m_{12}) - T_{124}T_{145}m_{32}(1-m_{11})/2.
\end{array}$$

Wir definieren $f = m_{11}$ und $s = m_{22}$. Der Typ fordert $T_{124} \neq 0$ und es gilt $f \neq 0$. Daher werden die Gleichungen (3) und ($\bar{3}$) genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\begin{aligned} m_{44} &= fs, \\ m_{32} &= 0. \end{aligned}$$

Mit diesen Ersetzungen werden die Gleichungen (1) und (2) genau dann erfüllt, wenn m_{55} den beiden folgenden Bedingungen genügt

$$\begin{aligned} m_{55} &= fm_{44} \\ &= ffs \\ &= s, \\ m_{55} &= sm_{33} \quad \text{oder} \quad T_{235} = 0. \end{aligned}$$

Dies impliziert

$$m_{33} = 1 \quad \text{oder} \quad T_{235} = 0$$

und damit sind die Diagonalelemente von M bestimmt. Kommen wir nun zur Auswertung der beiden Gleichungen (4) und ($\bar{4}$). Mit den bisherigen Ersetzungen haben diese folgende Form

$$\begin{aligned} T_{124}m_{45} &= T_{125}s(f-1) + T_{135}fm_{23} + T_{235}(m_{23}m_{12} - m_{13}s) + T_{145}fm_{24} \\ &\quad +T_{124}T_{145}s(1-f)/2, \\ T_{145}fm_{34} &= T_{135}(s - m_{33}f) - T_{235}m_{12}. \end{aligned}$$

Da m_{34} und m_{45} beide freie Parameter aus $\mathbb{Z}$ sind, können wir diese nun auf einer Seite isolieren und damit den Automorphismus beschreiben. Wir erhalten die geforderten Bedingungen

$$\begin{aligned} m_{34} &= ((sf - m_{33})T_{135} - fm_{12}T_{235})/T_{145} \text{ und} \\ m_{45} &= (s(f-1)T_{125} + fT_{135}m_{23} + T_{235}(m_{12}m_{23} - sm_{13}) + fT_{145}m_{24})/T_{124} \\ &\quad +T_{145}s(1-f)/2. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine allgemeine Beschreibung der Automorphismen. □

Bemerkung 4.3.7
Bei der Interpretation von Satz 4.3.6 muss man folgende Zusammenhänge beachten.

- *Der Typ von $G(T)$ impliziert $T_{124} \neq 0$ und $T_{145} \neq 0$. Damit sind die Bedingungen an m_{34} und m_{45} wohldefiniert.*
- *Es gelte $b = \mathrm{ggT}(T_{145}, T_{235})$. Die Gleichung für m_{34} lässt sich nach Lemma 2.2.1 und dem Beweis von Satz 4.3.6 darstellen als $(s-f)T_{135} = k_1 b$ mit $k_1 \in \mathbb{Z}$. Da Bemerkung 2.1.1 impliziert, dass $T_{135} \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{b}{2} \rfloor\}$ gilt, gilt $f = m_{33}s$ oder $T_{135} \in \{0, \frac{b}{2}\}$.*
- *Es gelte $c = \mathrm{ggT}(T_{124}, T_{135}, T_{145}, T_{235})$. Die Gleichung für m_{45} lässt sich nach Lemma 2.2.1 und dem Beweis von Satz 4.3.6 darstellen als $(f-1)sT_{125} = k_2 c$ mit $k_2 \in \mathbb{Z}$. Da Bemerkung 2.1.1 impliziert, dass $T_{125} \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{c}{2} \rfloor\}$ gilt, gilt $f = 1$ oder $T_{125} \in \{0, \frac{c}{2}\}$.*

Da wir für die Matrix M aus Satz 4.3.6 ganzzahlige Einträge fordern, sind die Bedingungen an m_{34} und m_{45} nicht für alle $m_{12}, m_{23}, m_{13}, m_{24} \in \mathbb{Z}$ erfüllt. Der Beweis von Satz 4.3.6 liefert dazu einige Zusammenhänge.

Korollar 4.3.8
Seien die Notationen und Voraussetzungen aus Satz 4.3.6 und Bemerkung 4.3.7 gegeben. Dann gelten folgende Aussagen.

(a) *Es gilt $m_{34} \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn entweder*
  - *$f = m_{33}s$ und $\frac{T_{145}}{b} \mid m_{12}$ gilt oder*
  - *$f = -m_{33}s$, $T_{135} \in \{0, \frac{b}{2}\}$ und $\frac{T_{145}}{b} \mid (2\frac{T_{135}}{b} + fm_{12}\frac{T_{235}}{b})$.*

(b) *Sei $k \in \mathbb{Z}$ so, dass $T_{135}fm_{23} + T_{235}(m_{12}m_{23} - sm_{13}) + T_{145}fm_{24} = k\mathrm{ggT}(b, T_{135})$ gilt. Dann gilt $m_{45} \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn entweder*
  - *$f = 1$ und $\frac{T_{145}}{c} \mid k$ gilt oder*
  - *$f = -1$, $T_{125} \in \{0, \frac{c}{2}\}$ und $\frac{T_{124}}{c} \mid (k\frac{\mathrm{ggT}(b, T_{135})}{c} + 2s\frac{T_{125}}{c})$.*

4.3.3 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir die theoretischen Erkenntnisse aus den letzten beiden Abschnitten auf einige konkrete Gruppen anwenden.

Beispiel 4.3.9
Sei $G \cong G(t)$ mit $t = (12, -17, -30, 95, -24, 36)$. Dann ist G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(3, 1, 1)$

und hat eine $\mathcal{T}$-Präsentation in Erzeugern $g_1 \ldots, g_5$, so dass g_2 und g_4 beziehungsweise g_3 und g_4 kommutieren und die nicht-trivialen Relationen folgende Form haben

$$\begin{aligned}
g_2 g_1 &= g_1 g_2 g_4^{12} g_5^{-17}, \\
g_3 g_1 &= g_1 g_3 g_4^{-30} g_5^{95}, \\
g_4 g_1 &= g_1 g_4 g_5^{-24}, \\
g_3 g_2 &= g_2 g_3 g_5^{36}.
\end{aligned}$$

Nun wollen wir T so bestimmen, dass $G(T)$ die in Satz 4.3.3 beschriebene kanonische Form für diesen Isomorphietyp hat. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned}
a &= \mathrm{ggT}(12, -30) = 6, \\
6 &= 3 \cdot 12 + 1 \cdot (-30), \\
12 &= 2a, \\
-30 &= -5a.
\end{aligned}$$

Damit hat $L_{x,y}(12, -30)$ die Form

$$L_{x,y}(12, -30) = \left\{ \begin{pmatrix} 3-5x & 5y \\ 1-2x & 2y \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{Z}, y \in \{\pm 1\} \right\}.$$

Nach Bemerkung 4.3.4 ist die kanonische Form unabhängig von der Wahl von $L \in L_{x,y}(12, -30)$. Sei also

$$L = L_{0,1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt, wie gewünscht,

$$(12, -30) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (36 - 30, 60 - 60) = (6, 0).$$

Als nächstes berechnen wir (l_1, l_2), wie in Satz 4.3.3 beschrieben, durch

$$(l_1, l_2) = (-17, 95) \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (-51 + 95, -85 + 190) = (44, 105).$$

Damit können wir nun b und c bestimmen

$$\begin{aligned}
b &= \mathrm{ggT}(-24, 36) = 12, \\
c &= \mathrm{ggT}(105, 6, 12) = 3.
\end{aligned}$$

Des Weiteren gilt $105 \bmod 12 = 9$ und $(-105) \bmod 12 = 3$ beziehungsweise $44 \bmod 3 = 2$ und $(-44) \bmod 3 = 1$. Es gilt $\mathrm{Min}(12, 3) = 3$ und damit $e_2 = -1$ beziehungsweise $\mathrm{Min}(2, 1) = 1$ und damit $e_1 = -1$.
Dies führt zu folgendem Ergebnis für T

$$\begin{aligned}
T_{235} &= |36| &&= 36, \\
T_{145} &= |-24| &&= 24, \\
T_{124} &= 6, \\
T_{134} &= 0, \\
T_{135} &= -105 \bmod 12 &&= 3, \\
T_{125} &= -44 \bmod 3 &&= 1.
\end{aligned}$$

Damit gilt $\mathrm{Cf}(t) = (6, 1, 0, 3, 24, 36)$ und G besitzt eine $\mathcal{T}$-Präsentation, deren nicht-triviale Relationen beschrieben sind durch

$$\begin{aligned} g_2 g_1 &= g_1 g_2 g_4^6 g_5^1, \\ g_3 g_1 &= g_1 g_3 g_5^3, \\ g_4 g_1 &= g_1 g_4 g_5^{24}, \\ g_3 g_2 &= g_2 g_3 g_5^{36}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Automorphismengruppe von $G(T)$. Es gilt $T_{135} \notin \{0, \frac{12}{2}\}$ und $T_{125} = 1 \notin \{0, \frac{3}{2}\}$. Damit gilt nach Bemerkung 4.3.7 die in Satz 4.3.6 beschriebenen Form von M mit $s = f = 1$. Ebenfalls nach Satz 4.3.6 gilt $m_{34} = \frac{-36 m_{12}}{24} = -\frac{3 m_{12}}{2}$. Da m_{34} ganzzahlig werden muss, folgt analog zu Korollar 4.3.8 für ein beliebiges $x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} m_{12} &= 2x, \\ m_{34} &= 3x. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} m_{45} &= \frac{3m_{23} + 36(m_{12}m_{23} - m_{13}) + 24m_{24}}{6} \\ &= \frac{m_{23} + 6(2xm_{23} - m_{13}) + 4m_{24}}{2}. \end{aligned}$$

Da m_{45} ebenfalls ganzzahlig werden muss und die beiden hinteren Summanden bereits durch 2 teilbar sind, gilt für beliebige $y, u, v \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} m_{23} &= 2y, \\ m_{13} &= u, \\ m_{24} &= v, \\ m_{45} &= y + 12xy - 3u + 4v. \end{aligned}$$

Damit korrespondiert ein Automorphismus von $G(T)$ zu folgender Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2x & u & * & * \\ 0 & 1 & 2y & v & * \\ 0 & 0 & 1 & 3x & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & y + 12xy - 3u + 4v \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Z}),$$

wobei $*$ für ein beliebiges Element aus $\mathbb{Z}$ steht und $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt.

Betrachten wir nun eine Gruppe, die die Eigenschaft hat, dass in ihrer kanonischen Form $T_{125} = 0$ gilt.

Beispiel 4.3.10
Sei $G \cong G(t)$ mit $t = (-60, 19, 42, -23, -14, 21)$ eine Gruppe vom Typ $(3, 1, 1)$. Dann hat G eine $\mathcal{T}$-Präsentation der Form

$$\begin{aligned} g_2 g_1 &= g_1 g_2 g_4^{-60} g_5^{19}, \\ g_3 g_1 &= g_1 g_3 g_4^{42} g_5^{-23}, \\ g_4 g_1 &= g_1 g_4 g_5^{-14}, \end{aligned}$$

$$g_3g_2 = g_2g_3g_5^{21}.$$

Nun wollen wir T so bestimmen, dass $G(T)$ die in Satz 4.3.3 beschriebene kanonische Form für diesen Isomorphietyp hat. Dazu berechnen wir

$$\begin{aligned} a &= \mathrm{ggT}(-60, 42) = 6, \\ 6 &= 2 \cdot (-60) + 3 \cdot 42, \\ -60 &= -10a, \\ 42 &= 7a. \end{aligned}$$

Nach Bemerkung 4.3.4 ist die kanonische Form unabhängig von der Wahl von $L \in L_{x,y}(-60, 42)$. Sei also

$$L = L_{0,1} = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}.$$

Wir berechnen (l_1, l_2), wie in Satz 4.3.3 beschrieben, durch

$$(l_1, l_2) = (19, -23) \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -10 \end{pmatrix} = (38 - 69, -133 + 230) = (-31, 97).$$

Damit können wir nun b und c bestimmen

$$\begin{aligned} b &= \mathrm{ggT}(-14, 21) = 7, \\ c &= \mathrm{ggT}(97, 6, 7) = 1. \end{aligned}$$

Weiter gilt $97 \bmod 7 = 6$ und $(-97) \bmod 7 = 1$ beziehungsweise $(-31) \bmod 1 = 0$ und $31 \bmod 1 = 0$. Es gilt $\mathrm{Min}(6, 1) = 1$ und damit $e_2 = -1$ beziehungsweise $\mathrm{Min}(0, 0) = 0$ und damit $e_1 \in \{\pm 1\}$.
Dies führt zu folgendem Ergebnis für T

$$\begin{aligned} T_{235} &= |21| &&= 21, \\ T_{145} &= |-14| &&= 14, \\ T_{124} &= 6, \\ T_{134} &= 0, \\ T_{135} &= -97 \bmod 7 &&= 1, \\ T_{125} &= -31 \bmod 1 &&= 0. \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathrm{Cf}(t) = (6, 0, 0, 1, 14, 21)$ und G besitzt eine $\mathcal{T}$-Präsentation, deren nicht-triviale Relationen beschrieben sind durch

$$\begin{aligned} g_2g_1 &= g_1g_2g_4^{6}, \\ g_3g_1 &= g_1g_3g_5^{1}, \\ g_4g_1 &= g_1g_4g_5^{14}, \\ g_3g_2 &= g_2g_3g_5^{21}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Automorphismengruppe von $G(T)$. Es gilt $T_{135} = 1 \notin \{0, \frac{7}{2}\}$ und $T_{125} = 0 \in \{0, \frac{1}{2}\}$. Damit gilt nach Bemerkung 4.3.7 die in Satz 4.3.6 beschriebenen Form von M mit $s = f$. Ebenfalls nach Satz 4.3.6 gilt $m_{34} = \frac{-21fm_{12}}{14} = -\frac{3}{2}m_{12}f$. Da m_{34} ganzzahlig werden muss, folgt analog zu Korollar 4.3.8 für ein beliebiges $x \in \mathbb{Z}$

$$m_{12} = 2x,$$

$$m_{34} = -3fx.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}
m_{45} &= \frac{fm_{23} + 21(2xm_{23} - m_{13}f) + 14m_{24}f}{6} + 14\frac{f-1}{2} \\
&= \frac{fm_{23} + 42xm_{23} - 21m_{13}f + 14m_{24}f}{6} + 14\frac{f-1}{2} \\
&= \frac{m_{23} - 21m_{13} + 14m_{24}}{6}f + 7xm_{23} + 14\frac{f-1}{2}.
\end{aligned}$$

Da m_{45} ebenfalls ganzzahlig sein muss, erhalten wir die Zusatzgleichung $6y = m_{23} - 21m_{13} + 14m_{24}$. Dies führt für beliebige $u, v, y \in \mathbb{Z}$ zu folgenden Werten

$$\begin{aligned}
m_{13} &= u, \\
m_{24} &= v, \\
m_{23} &= 6y + 21u - 14v, \\
m_{45} &= yf + 7x(6y + 21u - 14v) + 7(f-1).
\end{aligned}$$

Damit korrespondiert ein Automorphismus von $G(T)$ zu folgender Matrix

$$M = \begin{pmatrix} f & 2x & u & * & * \\ 0 & f & 6y + 21u - 14v & v & * \\ 0 & 0 & 1 & -3fx & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & yf + 7x(6y + 21u - 14v) + 7(f-1) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Z}),$$

wobei $*$ für ein beliebiges Element aus $\mathbb{Z}$ steht, $f \in \{\pm 1\}$ und $x, y, u, v \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt.

Ein Vorteil der kanonischen Form ist die Lösung des Isomorphieproblems. Dazu betrachten wir noch ein kurzes Beispiel.

Beispiel 4.3.11
Seien die $\mathcal{T}$-Gruppen G_1, G_2 und G_3 vom Typ $(3,1,1)$ gegeben. Es gelte $G_1 \cong G(t_1), G_2 \cong G(t_2)$ und $G_3 \cong G(t_3)$ mit

$$\begin{aligned}
t_1 &= (-60, 19, 42, -23, -14, 21), \\
t_2 &= (12, 13, -30, -28, -14, -21), \\
t_3 &= (-24, -37, -18, 11, 14, -21).
\end{aligned}$$

Wenn wir mit dem Algorithmus aus Satz 4.3.3 die kanonische Form bestimmen, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cf}(t_1) &= (6, 0, 0, 1, 14, 21), \\
\mathrm{Cf}(t_2) &= (6, 0, 0, 2, 14, 21), \\
\mathrm{Cf}(t_3) &= (6, 0, 0, 1, 14, 21).
\end{aligned}$$

Damit sind nach Folgerung 4.3.1 G_1 und G_3 isomorph zueinander und G_2 ist nicht isomorph zu den anderen.

Kapitel 5

Klassifikation der $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (2,1,1,1)

In diesem Kapitel klassifizieren wir die Gruppen vom Typ $(2, 1, 1, 1)$, indem wir ihre kanonische Form angeben. Dazu untersuchen wir zuerst die Struktur dieser Gruppen.

5.1 Eigenschaften der $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (2,1,1,1)

Das Ziel dieses Abschnitts ist es, die Isolatorreihe weiter zu untersuchen und zu verfeinern, um möglichst starke Bedingungen für einen Isomorphismus zwischen zwei Gruppen dieses Typs formulieren zu können.

Lemma 5.1.1
Sei G eine Gruppe vom Typ $(2, 1, 1, 1)$ und sei $C = C_G(I_3(G))$ der Zentralisator von $I_3(G)$. Dann gelten folgende Aussagen.

(a) *Die Untergruppe $I_3(G)$ ist frei abelsch vom Rang 2.*

(b) *Durch $G > C > I_2(G) > I_3(G) > I_4(G) > I_5(G) = \{1\}$ wird eine vollständig invariante Zentralreihe mit frei abelschen Quotienten vom Rang 1 definiert.*

(c) *Es gilt $I_2(C) \in \{I_4(G), \{1\}\}$.*

Beweis:

(a) Die Faktoren $I_3(G)/I_4(G)$ und $I_4(G)/\{1\} \cong I_4(G)$ sind frei abelsch von Grad 1. Das heißt, $I_3(G)$ kann von zwei Elementen erzeugt werden, von denen eines in der zentralen Untergruppe $I_4(G)$ liegt. Damit ist $I_3(G)$ wie gefordert abelsch und somit frei abelsch vom Rang 2.

(b) Mit $I_3(G)$ ist nach Konstruktion auch C vollständig invariant. Wie bereits in (a) gezeigt, kann $I_3(G)$ von zwei Elementen x und y erzeugt werden, wobei y in $I_4(G)$ liegt. Sei $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(I_3(G))$ der natürliche Homomorphismus, der durch die Konjugation von $I_3(G)$ mit G induziert wird. Da $I_3(G)$ nach (a) frei abelsch vom Rang 2 ist, gilt $\mathrm{Aut}(I_3(G)) \cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ bezüglich der Basis $\{x, y\}$. Darüber hinaus wissen wir, dass für alle $g \in G$ $x^g = xy^{\alpha_g}$ für $\alpha_g \in \mathbb{Z}$ und $y^g = y$ gilt. Das heißt, $\varphi(g)$ entspricht der Matrix

$$M_{\varphi(g)} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_g \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Demnach ist das Bild von G unter φ in der Untergruppe der unipotenten oberen Dreiecksmatrizen der $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ enthalten. Weiter impliziert der Typ von G, dass $I_3(G)$ nicht zentral ist. Damit finden wir Elemente $g \in G$, die nicht mit x kommutieren, für die also $\alpha_g \neq 0$ gilt. Das bedeutet, dass $\varphi(G)$ nicht trivial sein kann. Damit ist $\varphi(G)$ eine unendlich zyklische Gruppe. In dem Zentralisator von $I_3(G)$ liegen genau die Elemente aus g, die mit x kommutieren und für die $M_{\varphi(G)}$ die Einheitsmatrix ist. Damit gilt $C = ker(\varphi)$. Der Homomorphiesatz liefert uns nun $G/C \cong Bild(\varphi) \cong \mathbb{Z}$. Das bedeutet, dass G/C abelsch ist und folgende Inklusion gilt

$$G/C \subseteq G/G'.$$

Also gilt $G' \subseteq C$ und demnach $I_2(G) \leq C$. Des Weiteren hat C die Hirschlänge 4 und alle Quotienten der in (b) beschriebenen Reihe sind frei abelsch vom Rang 1.

(c) Da $C \leq G$ nach (b) die Hirschlänge 4 hat, ist G vom Typ (4) oder vom Typ $(3,1)$. Im ersten Fall ist $I_2(G) = \{1\}$ und damit von der im Satz geforderten Form. Im zweiten Fall ist $I_2(C)$ zyklisch. Da G/C torsionsfrei ist, folgt $I_2(C) \leq I_2(G)$. Falls $I_2(C) \cap I_3(G) = \{1\}$ gilt, erhält man $I_2(G) = I_2(C) \times I_3(G)$. Das führt zu folgendem Zusammenhang

$$[G, I_2(G)] = [G, I_3(G)][G, I_2(C)] = [G, I_2(C)] \leq I_2(C) \cap I_3(G) = \{1\}$$

und liefert, dass $I_2(G)$ zentral ist. Dies widerspricht dem Typ von G. Damit gibt es ein nicht-triviales Element in $I_2(C) \cap I_3(G)$. Sei $I_2(C) = \langle a \rangle$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{Z}, n \neq 0$ mit $a^n \in I_3(g)$ und die Isolatoreigenschaft liefert $I_2(C) \leq I_3(G)$. Mit den selben Argumenten folgt $I_2(C) \leq I_4(G)$. Da $I_4(G)$ zyklisch ist, liefert der nicht-triviale Schnitt mit $I_2(C)$, zusammen mit der Isolatoreigenschaft, dass $I_4(G) \leq I_2(C)$ gilt. Damit folgt die im Satz geforderte Gleichheit.

□

5.2 Die kanonische Form

Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2,1,1,1)$ und sei $C = C_G(I_3(G))$ der Zentralisator von $I_3(G)$. Wir wählen eine $\mathcal{T}$-Sequenz $(g_1, \ldots, g_5)$ für G, welche folgende Serie induziert

$$G > C > I_2(G) > I_3(G) > I_4(G) > \{1\}.$$

Nach Lemma 5.1.1(b) hat C Hirschlänge 4. Zusammen mit Lemma 5.1.1 (c) folgt daraus, dass G eine $\mathcal{T}$-Präsentation in $g_1, \ldots, g_5$ hat, so dass g_2 und g_4 beziehungsweise g_3 und g_4 kommutieren und der Kommutator von g_2 und g_3 in $\langle g_5 \rangle$ liegt. Die nicht-trivialen Relationen haben damit folgende Form

$$(\star)\qquad \begin{aligned} g_2g_1 &= g_1g_2g_3^{t_{123}}g_4^{t_{124}}g_5^{t_{125}},\\ g_3g_1 &= g_1g_3g_4^{t_{134}}g_5^{t_{135}},\\ g_4g_1 &= g_1g_4g_5^{t_{145}},\\ g_3g_2 &= g_2g_3g_5^{t_{235}}. \end{aligned}$$

Es gilt $t_{ijk} \in \mathbb{Z}$ und der Typ von G impliziert $t_{123}t_{134}t_{145} \neq 0$. Nach Satz 3.3.2 ist die Präsentation $(\star)$ konsistent. Nach Satz 2.3.5 ist G damit isomorph zu einer $\mathcal{T}$-Gruppe $G(t)$ mit

$$t = (t_{123}, t_{124}, t_{125}, t_{134}, t_{135}, t_{145}, t_{235}) \in \mathbb{Z}^7.$$

Nach Satz 3.2.1 ist die Multiplikation in $G(t)$ gegeben durch die Hallpolynome $p_1, \ldots, p_5$ mit

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1 + b_1,\\ p_2 &= a_2 + b_2,\\ p_3 &= a_3 + b_3 + t_{123}a_2b_1,\\ p_4 &= a_4 + b_4 + t_{124}a_2b_1 + t_{134}a_3b_1 + t_{123}t_{134}a_2s_2(b_1),\\ p_5 &= a_5 + b_5 + t_{235}a_3b_2 + t_{145}a_4b_1 + t_{135}a_3b_1 + t_{125}a_2b_1 + t_{134}t_{145}a_3s_2(b_1)\\ &\quad + t_{123}t_{235}a_2b_1b_2 + t_{123}t_{235}s_2(a_2)b_1 + (t_{123}t_{135} + t_{124}t_{145})a_2s_2(b_1)\\ &\quad + t_{123}t_{134}t_{145}a_2s_3(b_1). \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Polynome wollen wir nun eine kanonische Form für $G(t)$ und damit für G bestimmen. Dies führt uns zu einem der Hauptresultate dieses Kapitels. Zur Erinnerung, die kanonische Dekomposition des ggTs d der Elemente $a_1, \ldots, a_s$ ist so gewählt, dass das Tupel $(x_1, \cdots, x_s) \in \mathbb{Z}^s$ mit $a_1x_1 + \cdots a_sx_s = d$ minimal bezüglich der Wohlordnung $\ll$ auf $\mathbb{Z}^s$ ist, siehe Definition 2.2.3.

Satz 5.2.1
Sei $G(t)$ eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2,1,1,1)$. Es gelte

- $S_1 = \mathrm{sign}(t_{123}), S_2 = \mathrm{sign}(t_{134}), S_3 = \mathrm{sign}(t_{145})$,
- $d = \mathrm{ggT}(t_{123}, t_{134})$ *mit kanonischer Dekomposition* $d = u_1\ t_{123} + u_2\ t_{134}$,
- $p = \mathrm{ggT}(t_{134}, t_{235})$ *mit kanonischer Dekomposition* $p = v_1\ t_{134} + v_2\ t_{235}$,
- $e_2 = S_1S_2S_3 \in \{\pm 1\}$.

Wir definieren $\pi = \mathrm{pref}((\pm t_{124}) \bmod d)$ *und wählen* $e \in \pi$. *Basierend auf dieser Wahl definieren wir*

- $e_1 = e_1(e) = S_1S_3e \in \{\pm 1\}$,
- $n = n(e) = -((e\ t_{124})\ \mathrm{div}\ d)$,
- $c_1 = c_1(e) = -S_1S_3t_{145}u_1n$,
- $l = l(e) = nt_{145}\frac{t_{134}}{d}$,
- $g = g(e) = \mathrm{ggT}(t_{134}, t_{235}, l)$ *mit kanonischer Dekomposition* $g = w_1t_{134} + w_2t_{235} + w_3l$,
- $m = m(e) = -((e_1t_{135} + c_1)\ \mathrm{div}\ g)$,
- $c_2 = c_2(e) = S_2(t_{134}w_1mu_2\ n + et_{124}w_1m + e_1t_{135}u_2n + et_{135}\frac{t_{123}}{d}w_3nm)$,
- $k = k(e) = mt_{124}\frac{t_{235}}{p}$,
- $o = o(e) = m(t_{135}n\frac{t_{123}}{d}\frac{p}{g} - t_{124}v_1\frac{l}{g})$,
- $h = h(e) = \mathrm{ggT}(t_{123}, t_{145}, t_{235}, k, o)$.

Darauf aufbauend definieren wir

$$T_{123} = |t_{123}|,$$

$$\begin{aligned}
T_{134} &= |t_{134}|,\\
T_{145} &= |t_{145}|,\\
T_{235} &= |t_{235}|,\\
T_{124} &= (et_{124}) \bmod d,\\
T_{135} &= (e_1 t_{135} + c_1) \bmod g,\\
T_{125} &= (e_2 t_{125} + c_2) \bmod h.
\end{aligned}$$

Dann ist $G(t)$ isomorph zu $G(T)$. Des Weiteren gelten folgende Aussagen

(a) *Im Fall $T_{124} \notin \{0, \frac{d}{2}\}$ gilt $|\pi| = 1$ und e ist eindeutig bestimmt. In diesem Fall gilt $\mathrm{Cf}(t) = T$ und $G(T)$ ist eine kanonische Form für den Isomorphietyp von $G(t)$.*

(b) *Im Fall $T_{124} \in \{0, \frac{d}{2}\}$ gilt $\pi = \{\pm 1\}$. Wenn dies eintritt, wählen wir $e \in \pi$ so, dass $(e_1 t_{135} + c_1) \bmod g$ minimal ist und, falls möglich, auch so, dass $(e_2 t_{125} + c_2) \bmod h$ minimal ist. Dann gilt $\mathrm{Cf}(t) = T$ und $G(T)$ ist eine kanonische Form für den Isomorphietyp von $G(t)$.*

Beweis:
Sei eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} \end{pmatrix}$$

mit $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ und Diagonalelementen $m_{ii}, 1 \leq i \leq 5 \in \{\pm 1\}$ gegeben. Dann gilt $M \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$. Sei $T = (T_{123}, T_{124}, T_{125}, T_{134}, T_{135}, T_{145}, T_{235}) \in \mathbb{Z}^7$. Dann korrespondiert eine solche Matrix nach Lemma 3.1.1 genau dann zu einem Isomorphismus $G(T) \to G(t)$, falls die durch M definierten Bilder die Relationen von $G(T)$ erfüllen. Das können wir mit Hilfe der Hallpolynome überprüfen. Im Folgenden bezeichnen wir die Zeilen von M mit $m_1, \ldots, m_5$ und die Erzeugenden von $G(T)$ mit $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_5$. Da g_5 zentral in $G(t)$ ist und $\langle g_3, g_4, g_5 \rangle$ abelsch ist, beziehungsweise $\bar{g}_5$ zentral in $G(T)$ ist und $\langle \bar{g}_3, \bar{g}_4, \bar{g}_5 \rangle$ abelsch ist, brauchen wir nur die nicht-trivialen Relationen zu untersuchen. Betrachten wir zuerst die Gleichung

$$\varphi(\bar{g}_4)\varphi(\bar{g}_1) = \varphi(\bar{g}_1)\varphi(\bar{g}_4)\varphi(\bar{g}_5)^{T_{145}}.$$

Nun berechnen wir für beide Seiten dieser Gleichung die jeweilige Normalform. Dabei bekommen wir für die linke Seite folgendes Ergebnis

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{g}_4)\varphi(\bar{g}_1) &= g_4^{m_{44}} g_5^{m_{45}} g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}}\\
&= g_1^{p_1(m_4,m_1)} g_2^{p_2(m_4,m_1)} g_3^{p_3(m_4,m_1)} g_4^{p_4(m_4,m_1)} g_5^{p_5(m_4,m_1)}\\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{44}+m_{14}} g_5^{m_{45}+m_{15}+t_{145}m_{44}m_{11}}.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ergibt

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{g}_1)\varphi(\bar{g}_4)\varphi(\bar{g}_5)^{T_{145}} &= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} g_4^{m_{44}} g_5^{m_{45}} g_5^{T_{145}m_{55}}\\
&= g_1^{p_1(m_1,m_4)} g_2^{p_2(m_1,m_4)} g_3^{p_3(m_1,m_4)} g_4^{p_4(m_1,m_4)} g_5^{p_5(m_1,m_4)} g_5^{T_{145}m_{55}}\\
&= g_1^{p_1(m_1,m_4)} g_2^{p_2(m_1,m_4)} g_3^{p_3(m_1,m_4)} g_4^{p_4(m_1,m_4)} g_5^{p_5(m_1,m_4)+T_{145}m_{55}}\\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{44}+m_{14}} g_5^{m_{45}+m_{15}+T_{145}m_{55}}.
\end{aligned}$$

Damit haben wir eine Relation ausgewertet. Nun betrachten wir die nächste Relation und erhalten folgende Gleichung

$$\varphi(\bar{g}_3)\varphi(\bar{g}_2) = \varphi(\bar{g}_2)\varphi(\bar{g}_3)\varphi(\bar{g}_5)^{T_{235}}.$$

Für die linke Seite berechnen wir

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{g}_3)\varphi(\bar{g}_2) &= g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} g_5^{m_{35}} g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}} g_4^{m_{24}} g_5^{m_{25}} \\
&= g_2^{p_2(m_3,m_2)} g_3^{p_3(m_3,m_2)} g_4^{p_4(m_3,m_2)} g_5^{p_5(m_3,m_2)} \\
&= g_2^{m_{22}} g_3^{m_{33}+m_{23}} g_4^{m_{34}+m_{24}} g_5^{m_{35}+m_{25}+t_{235}m_{33}m_{22}}.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{g}_2)\varphi(\bar{g}_3)\varphi(\bar{g}_5)^{T_{235}} &= g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}} g_4^{m_{24}} g_5^{m_{25}} g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} g_5^{m_{35}} g_5^{T_{235}m_{55}} \\
&= g_2^{p_2(m_2,m_3)} g_3^{p_3(m_2,m_3)} g_4^{p_4(m_2,m_3)} g_5^{p_5(m_2,m_3)} g_5^{T_{235}m_{55}} \\
&= g_2^{p_2(m_2,m_3)} g_3^{p_3(m_2,m_3)} g_4^{p_4(m_2,m_3)} g_5^{p_5(m_2,m_3)+T_{235}m_{55}} \\
&= g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}+m_{33}} g_4^{m_{24}+m_{34}} g_5^{m_{25}+m_{35}+T_{235}m_{55}}.
\end{aligned}$$

Als Nächstes betrachten wir die Relation

$$\varphi(\bar{g}_3)\varphi(\bar{g}_1) = \varphi(\bar{g}_1)\varphi(\bar{g}_3)\varphi(\bar{g}_4)^{T_{134}}\varphi(\bar{g}_5)^{T_{135}}.$$

Wir beginnen wieder mit der Auswertung der linken Seite

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{g}_3)\varphi(\bar{g}_1) &= g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} g_5^{m_{35}} g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} \\
&= g_1^{p_1(m_3,m_1)} g_2^{p_2(m_3,m_1)} g_3^{p_3(m_3,m_1)} g_4^{p_4(m_3,m_1)} g_5^{p_5(m_3,m_1)} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{33}+m_{13}} g_4^{m_{34}+m_{14}+t_{134}m_{33}m_{11}} \\
&\quad g_5^{m_{35}+m_{15}+t_{235}m_{33}m_{12}+t_{145}m_{34}m_{11}+t_{135}m_{33}m_{11}+t_{134}t_{145}m_{33}m_{11}(m_{11}-1)/2}.
\end{aligned}$$

Dann betrachten wir die rechte Seite

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{g}_1)\varphi(\bar{g}_3)\varphi(\bar{g}_4)^{T_{134}}\varphi(\bar{g}_5)^{T_{135}} &= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} g_3^{m_{33}} g_4^{m_{34}} g_5^{m_{35}} \\
&\quad (g_4^{m_{44}} g_5^{m_{45}})^{T_{134}} g_5^{T_{135}m_{55}} \\
&= g_1^{p_1(m_1,m_3)} g_2^{p_2(m_1,m_3)} g_3^{p_3(m_1,m_3)} g_4^{p_4(m_1,m_3)} g_5^{p_5(m_1,m_3)} \\
&\quad g_4^{T_{134}m_{44}} g_5^{T_{134}m_{45}} g_5^{T_{135}m_{55}} \\
&= g_1^{p_1(m_1,m_3)} g_2^{p_2(m_1,m_3)} g_3^{p_3(m_1,m_3)} g_4^{p_4(m_1,m_3)+T_{134}m_{44}} \\
&\quad g_5^{p_5(m_1,m_3)+T_{134}m_{45}+T_{135}m_{55}} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}+m_{33}} g_4^{m_{14}+m_{34}+T_{134}m_{44}} \\
&\quad g_5^{m_{15}+m_{35}+T_{134}m_{45}+T_{135}m_{55}}.
\end{aligned}$$

Als letzte Relation betrachten wir

$$\varphi(\bar{g}_2)\varphi(\bar{g}_1) = \varphi(\bar{g}_1)\varphi(\bar{g}_2)\varphi(\bar{g}_4)^{T_{124}}\varphi(\bar{g}_5)^{T_{125}}.$$

Die linke Seite ergibt

$$\begin{aligned}
\varphi(\bar{g}_2)\varphi(\bar{g}_1) &= g_2^{m_{22}} g_3^{m_{23}} g_4^{m_{24}} g_5^{m_{25}} g_1^{m_{11}} g_2^{m_{12}} g_3^{m_{13}} g_4^{m_{14}} g_5^{m_{15}} \\
&= g_1^{p_1(m_2,m_1)} g_2^{p_2(m_2,m_1)} g_3^{p_3(m_2,m_1)} g_4^{p_4(m_2,m_1)} g_5^{p_5(m_2,m_1)} \\
&= g_1^{m_{11}} g_2^{m_{22}+m_{12}} g_3^{m_{23}+m_{13}+t_{123}m_{22}m_{11}} \\
&\quad g_4^{m_{24}+m_{14}+t_{124}m_{22}m_{11}+t_{134}m_{23}m_{11}+t_{123}t_{134}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2} \\
&\quad g_5^{m_{25}+m_{15}+t_{235}m_{23}m_{12}+t_{145}m_{24}m_{11}+t_{135}m_{23}m_{11}+t_{125}m_{22}m_{11}} \\
&\quad g_5^{t_{134}t_{145}m_{23}m_{11}(m_{11}-1)/2+t_{123}t_{235}m_{22}m_{12}m_{11}+t_{123}t_{235}m_{11}m_{22}(m_{22}-1)/2} \\
&\quad g_5^{(t_{123}t_{135}+t_{124}t_{145})m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2+t_{123}t_{134}t_{145}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)(m_{11}-2)/6}.
\end{aligned}$$

Für die rechte Seite folgt

$$
\begin{aligned}
\varphi(\bar{g_1})\varphi(\bar{g_2})\varphi(\bar{g_2})^{T_{123}}\varphi(\bar{g_4})^{T_{124}}\varphi(\bar{g_5})^{T_{125}} &= g_1^{m_{11}}g_2^{m_{12}}g_3^{m_{13}}g_4^{m_{14}}g_5^{m_{15}}g_2^{m_{22}}g_3^{m_{23}}g_4^{m_{24}}g_5^{m_{25}} \\
&\quad (g_3^{m_{33}}g_4^{m_{34}}g_5^{m_{35}})^{T_{123}}(g_4^{m_{44}}g_5^{m_{45}})^{T_{124}}g_5^{T_{125}m_{55}} \\
&= g_1^{m_{11}}g_2^{m_{12}}g_3^{m_{13}}g_4^{m_{14}}g_5^{m_{15}}g_2^{m_{22}}g_3^{m_{23}}g_4^{m_{24}}g_5^{m_{25}} \\
&\quad g_3^{T_{123}m_{33}}g_4^{T_{123}m_{34}}g_5^{T_{123}m_{35}}g_4^{T_{124}m_{44}}g_5^{T_{124}m_{45}} \\
&\quad g_5^{T_{125}m_{55}} \\
&= g_1^{m_{11}}g_2^{m_{12}}g_3^{m_{13}}g_4^{m_{14}}g_5^{m_{15}}g_2^{m_{22}}g_3^{m_{23}}g_4^{m_{24}}g_5^{m_{25}} \\
&\quad g_3^{T_{123}m_{33}}g_4^{T_{123}m_{34}+T_{124}m_{44}} \\
&\quad g_5^{T_{123}m_{35}+T_{124}m_{45}+T_{125}m_{55}} \\
&= g_1^{p_1(m_1,m_2)}g_2^{p_2(m_1,m_2)}g_3^{p_3(m_1,m_2)}g_4^{p_4(m_1,m_2)}g_5^{p_5(m_1,m_2)} \\
&\quad g_3^{T_{123}m_{33}}g_4^{T_{123}m_{34}+T_{124}m_{44}} \\
&\quad g_5^{T_{123}m_{35}+T_{124}m_{45}+T_{125}m_{55}} \\
&= g_1^{p_1(m_1,m_2)}g_2^{p_2(m_1,m_2)}g_3^{p_3(m_1,m_2)+T_{123}m_{33}} \\
&\quad g_4^{p_4(m_1,m_2)+T_{123}m_{34}+T_{124}m_{44}} \\
&\quad g_5^{p_5(m_1,m_2)+T_{123}m_{35}+T_{124}m_{45}+T_{125}m_{55}} \\
&= g_1^{m_{11}}g_2^{m_{12}+m_{22}}g_3^{m_{13}+m_{23}+T_{123}m_{33}} \\
&\quad g_4^{m_{14}+m_{24}+T_{123}m_{34}+T_{124}m_{44}} \\
&\quad g_5^{m_{15}+m_{25}+t_{235}m_{13}m_{22}+T_{123}m_{35}+T_{124}m_{45}+T_{125}m_{55}}.
\end{aligned}
$$

Da die Präsentation von $G(t)$ konsistent ist, ist die Normalform eindeutig. Das heißt, die Exponenten auf den linken Seiten der betrachteten Gleichungen müssen mit denen auf der rechten Seite übereinstimmen. Wir erhalten also folgende Zusammenhänge zwischen t und T

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad T_{123}m_{33} &&= t_{123}m_{11}m_{22}, \\
&(2)\quad T_{235}m_{55} &&= t_{235}m_{22}m_{33}, \\
&(3)\quad T_{145}m_{55} &&= t_{145}m_{11}m_{44}, \\
&(4)\quad T_{134}m_{44} &&= t_{134}m_{11}m_{33}, \\
&(5)\quad T_{124}m_{44}+T_{123}m_{34} &&= t_{124}m_{22}m_{11}+t_{134}m_{23}m_{11} \\
& &&\quad +t_{123}t_{134}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2, \\
&(6)\quad T_{134}m_{45}+T_{135}m_{55} &&= t_{235}m_{33}m_{12}+t_{145}m_{34}m_{11}+t_{135}m_{33}m_{11} \\
& &&\quad +t_{134}t_{145}m_{33}m_{11}(m_{11}-1)/2, \\
&(7)\quad T_{124}m_{45}+T_{125}m_{55} && \\
&\qquad +t_{235}m_{13}m_{22}+T_{123}m_{35} &&= t_{235}m_{23}m_{12}+t_{145}m_{24}m_{11}+t_{135}m_{23}m_{11}+t_{125}m_{22}m_{11} \\
& &&\quad +t_{134}t_{145}m_{23}m_{11}(m_{11}-1)/2+t_{123}t_{235}m_{22}m_{12}m_{11} \\
& &&\quad +t_{123}t_{235}m_{11}m_{22}(m_{22}-1)/2 \\
& &&\quad +(t_{123}t_{135}+t_{124}t_{145})m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2 \\
& &&\quad +t_{123}t_{134}t_{145}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)(m_{11}-2)/6.
\end{aligned}
$$

Das Ziel dieser Rechnung ist eine Beschreibung der Elemente aus T in den Elementen aus t. Deshalb werden wir im nächsten Schritt die Elemente aus T auf den linken Seiten isolieren und gegebenenfalls bereits erfasste Elemente aus T durch ihre Darstellung in t ersetzen. Dies führt zu folgenden Gleichungen

$$
\begin{array}{llcl}
(1) & T_{123} & = & t_{123}m_{11}m_{22}m_{33}, \\
(2) & T_{235} & = & t_{235}m_{22}m_{33}m_{55}, \\
(3) & T_{145} & = & t_{145}m_{11}m_{44}m_{55}, \\
(4) & T_{134} & = & t_{134}m_{11}m_{33}m_{44}, \\
(5) & T_{124} & = & t_{124}m_{11}m_{22}m_{44} - t_{123}m_{11}m_{22}m_{33}m_{44}m_{34} + t_{134}m_{44} \\
& & & (t_{123}m_{22}(1-m_{11})/2 + m_{11}m_{23}), \\
(6) & T_{135} & = & t_{135}m_{11}m_{33}m_{55} + t_{235}m_{33}m_{55}m_{12} + t_{145}m_{11}m_{34}m_{55} \\
& & & +t_{134}m_{55}m_{33}(t_{145}(1-m_{11})/2 - m_{11}m_{44}m_{45}), \\
(7) & T_{125} & = & t_{125}m_{22}m_{11}m_{55} + t_{135}m_{23}m_{11}m_{55} + t_{235}m_{23}m_{12}m_{55} \\
& & & +t_{145}m_{24}m_{11}m_{55} + t_{123}t_{235}m_{22}m_{12}m_{11}m_{55} \\
& & & +t_{123}t_{135}m_{22}m_{55}(1-m_{11})/2 + t_{123}t_{235}m_{11}m_{55}(1-m_{22})/2 \\
& & & +t_{124}t_{145}m_{22}m_{55}(1-m_{11})/2 + t_{134}t_{145}m_{23}m_{55}(1-m_{11})/2 \\
& & & -t_{123}t_{134}t_{145}m_{22}m_{55}(1-m_{11})(2-m_{11})/6 \\
& & & -t_{235}m_{22}m_{23} - (t_{123}m_{11}m_{22}m_{33})m_{55}m_{35} \\
& & & -(t_{124}m_{11}m_{22}m_{44} - t_{123}m_{11}m_{22}m_{33}m_{44}m_{34} \\
& & & +t_{134}m_{44}(t_{123}m_{22}(1-m_{11})/2 + m_{11}m_{23}))m_{45}m_{55} \\
& & = & t_{125}m_{11}m_{22}m_{55} + t_{135}m_{11}m_{23}m_{55} \\
& & & +t_{235}m_{55}(m_{12}m_{23} - m_{13}m_{22}) \\
& & & +t_{145}m_{11}m_{24}m_{55} + t_{123}t_{235}m_{11}m_{12}m_{22}m_{55} \\
& & & +t_{123}m_{55}m_{11}m_{22}m_{33}(m_{34}m_{44}m_{45} - m_{35}) \\
& & & -t_{124}m_{11}m_{22}m_{44}m_{45}m_{55} \\
& & & -t_{134}m_{11}m_{23}m_{44}m_{45}m_{55} \\
& & & +t_{123}t_{135}m_{22}m_{55}(1-m_{11})/2 + t_{123}t_{235}m_{55}m_{11}(1-m_{22})/2 \\
& & & +t_{124}t_{145}m_{55}m_{22}(1-m_{11})/2 + t_{134}t_{145}m_{55}m_{23}(1-m_{11})/2 \\
& & & -t_{123}t_{134}t_{145}m_{55}m_{22}(1-m_{11})/2 - t_{123}t_{134}m_{55}m_{22}m_{44}m_{45}(1-m_{11})/2.
\end{array}
$$

Aus der Bedingung $m_{ii} \in \{\pm 1\}$ für $1 \leq i \leq 5$ schließen wir $T_{123} \in \{\pm t_{123}\}$, $T_{134} \in \{\pm t_{134}\}$ $T_{145} \in \{\pm t_{145}\}$ und $T_{134} \in \{\pm t_{134}\}$. Für die kanonische Form wollen wir erreichen, dass sie den positiven Wert annehmen. Dazu wählen wir $S_4 \in \{\pm 1\}$ mit der Eigenschaft $S_4 = \mathrm{sign}(t_{235})$ für den Fall $t_{235} \neq 0$. Dann wählen wir $m_{22}, \ldots, m_{55}$ als

$$
\begin{aligned}
m_{22} &= S_2S_3S_4, \\
m_{33} &= m_{11}S_1S_2S_3S_4, \\
m_{44} &= S_1S_3S_4, \\
m_{55} &= m_{11}S_1S_4.
\end{aligned}
$$

Damit liefern die Gleichungen (1)-(4) die gewünschten Werte für $T_{123}, T_{235}, T_{145}$ und T_{134}. Gleichung (5) verändert sich wie folgt

$$T_{124} = t_{124}m_{11}S_1S_2 - t_{123}S_3S_4m_{34} + t_{134}S_1(t_{123}S_2(1-m_{11})/2 + m_{11}S_3S_4m_{23}).$$

Unser Ziel ist es T_{124} in die Form $T_{124} = (et_{124}) \bmod d$ zu bringen. Dazu stellen wir fest, dass m_{23} und m_{34} frei wählbare Parameter in $\mathbb{Z}$ sind. Das bedeutet nach Lemma 2.2.1 und Lemma 2.2.2, dass wir mit einer geeigneten Wahl von m_{23} und m_{34} für die Summe

$$(*) \qquad -t_{123}S_3S_4m_{34} + t_{134}S_1(t_{123}S_2(1-m_{11})/2 + m_{11}S_3S_4m_{23})$$

den Wert $n\mathrm{ggT}(t_{123}, t_{134}) = nd$ erreichen können. Darüber hinaus liefert uns Lemma 2.2.2 jede mögliche Darstellung von nd in t_{123} und t_{134}. Seien u_1 und u_2 wie im Satz beschrieben und sei $x \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} nd &= n((u_1 - x\frac{t_{134}}{d})t_{123} + (u_2 + x\frac{t_{123}}{d})t_{134}) \\ &= n(u_1 - x\frac{t_{134}}{d})t_{123} + n(u_2 + x\frac{t_{123}}{d})t_{134}. \end{aligned}$$

Wir setzen dieses Ergebnis mit dem Summanden $(*)$ gleich und stellen fest, dass T_{124} durch die Wahl von m_{11}, m_{34} und m_{23} als

$$\begin{aligned} m_{11} &= S_1S_2e, \\ m_{34} &= -S_4S_3n(u_1 - x\frac{t_{134}}{d}), \\ m_{23} &= eS_4S_3S_2n(u_2 + x\frac{t_{123}}{d}) - eS_1S_4S_3t_{123}(1 - eS_1S_2)/2 \end{aligned}$$

die gewünschte Form hat. Mit diesen Ersetzungen wird Gleichung (6) wie folgt beschrieben

$$\begin{aligned} T_{135} &= t_{135}S_1S_3e \\ &\quad +t_{134}t_{145}S_3S_2(1 - S_1S_2e)/2 - t_{145}u_1nS_1S_3 \\ &\quad -t_{134}m_{45}S_4e + t_{235}m_{12}S_3S_2 + \frac{t_{134}}{d}t_{145}nxS_1S_3 \\ &= t_{135}e_1 + c_1 \\ &\quad -t_{134}(m_{45}S_4e - t_{145}S_3S_2(1 - S_1S_2e)/2) + t_{235}m_{12}S_3S_2 + lxS_1S_3. \end{aligned}$$

Hierbei sind m_{45}, m_{12} und x frei wählbare Parameter aus $\mathbb{Z}$. Damit können wir nach Lemma 2.2.1 und Lemma 2.2.2 die Teilsumme

$$(**) \qquad -t_{134}(m_{45}S_4e - t_{145}S_3S_2(1 - S_1S_2e)/2) + t_{235}m_{12}S_3S_2 + lxS_1S_3$$

durch eine geeignete Wahl von m_{45}, m_{12} und x als $m\mathrm{ggT}(t_{134}, t_{235}, l) = mg$ beschreiben. Darüber hinaus liefert uns Lemma 2.2.2 jede mögliche Darstellung von mg in t_{134}, t_{235} und l. Seien w_1, w_2 und w_3 wie im Satz beschrieben und seien $y, z \in \mathbb{Z}$ beliebig. Dann gilt

$$mg = m((w_1 + y\frac{t_{235}}{p} - zv_1\frac{l}{g})t_{134} + (w_2 - y\frac{t_{134}}{p} - zv_2\frac{l}{g})t_{235} + (w_3 + z\frac{p}{g})l).$$

Wir setzen dieses Ergebnis mit Summanden $(**)$ gleich und stellen fest, dass T_{135} durch die Wahl von m_{45}, m_{12} und x als

$$\begin{aligned} m_{45} &= S_4e(t_{145}S_3S_2(1 - S_1S_2e)/2) - m(w_1 + y\frac{t_{235}}{p} - zv_1\frac{l}{g}), \\ m_{12} &= S_3S_2m(w_2 - y\frac{t_{134}}{p} - zv_2\frac{l}{g}), \\ x &= S_1S_3m(w_3 + z\frac{p}{g}) \end{aligned}$$

von der Form $T_{135} = (e_1t_{135} + c_1) + mg$ ist. Damit haben wir Gleichung (6) ausgewertet und es gilt $T_{135} = (e_1t_{135} + c_1) \bmod g$ wie im Satz gefordert. Nun müssen wir noch Gleichung (7) untersuchen. Diese lässt sich mit allen bisherigen Ersetzungen schreiben als

$$T_{125} = e_2t_{125} + c_2 - t_{123}m_{35}S_1S_4S_2e + t_{145}m_{24}S_1S_4 - t_{235}m_{13}S_3e + kyS_2e + oz + f$$

mit $f \equiv 0 \bmod \mathrm{ggT}(t_{123}, t_{145}, t_{235})$ und den frei wählbaren Parametern $m_{35}, m_{24}, m_{13}, y, z$. Lemma 2.2.1 und Lemma 2.2.2 liefern eine Darstellung von T_{125} in der Form $T_{125} = e_2t_{125} + c_2 \bmod h$, wie sie im Satz gefordert wird. Die Wahl von $S_4 \in \{\pm 1\}$ hat dabei keinen Einfluss auf das Ergebnis. Dies vervollständigt den Beweis. $\square$

Die kanonische Form beruht unter anderem auf der kanonischen Dekomposition des ggT. Diese hängt von der gewählten Wohlordnung $\ll$ auf $\mathbb{Z}^n$ ab. Zusammen mit dem Beweis von Satz 5.2.1 impliziert dies zusätzlich folgende Ergebnisse.

Korollar 5.2.2

(a) *Die kanonische Form des Typs* $(2,1,1,1)$ *hängt von der auf* $\mathbb{Z}^n$ *gewählten Wohlordnung* $\ll$ *ab und ist bezüglich dieser Wohlordnung eindeutig. Wir schreiben deshalb auch* $T = \mathrm{Cf}_{\ll}(t)$.

(b) *Gruppen vom Typ* $(2,1,1,1)$ *sind genau dann isomorph, wenn ihre kanonische Form bezüglich* $\ll$ *übereinstimmt.*

5.3 Die Automorphismengruppe

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Automorphismengruppe einer $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2,1,1,1)$ bezüglich ihrer in Satz 5.2.1 bestimmten kanonischen Form. Hierfür nutzen wir die Erkenntnisse aus Lemma 3.1.1.

Satz 5.3.1
Sei $G(T)$ *eine* $\mathcal{T}$*-Gruppe vom Typ* $(2,1,1,1)$ *in ihrer in Satz 5.2.1 beschriebenen kanonischen Form. Dann korrespondiert ein Automorphismus von* $G(T)$ *zu einer Matrix der Form*

$$M = \begin{pmatrix} f & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ 0 & 0 & fm_{22} & m_{34} & m_{35} \\ 0 & 0 & 0 & m_{22} & m_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & fm_{22} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$$

mit $f, m_{22} \in \{\pm 1\}$ *und* $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, *so dass die Bedingungen*

$$\begin{aligned} m_{22} &= 1 \quad \textit{oder} \quad T_{235} = 0 \\ m_{23} &= m_{22}((f-1)T_{124} + fT_{123}m_{34})/T_{134} - T_{123}(f-1)/2, \\ m_{45} &= m_{22}(fm_{12}T_{235} + fm_{34}T_{145} + T_{135}(1-f))/T_{134} + T_{145}(f-1)/2, \\ m_{35} &= T_{134}T_{145}m_{22}(f-1)/2 + T_{135}m_{22}(1-f)/2 + T_{235}m_{12}f + (T_{134}T_{145}m_{23}(1-f)/2 \\ &\quad + T_{124}T_{145}m_{22}(1-f)/2 + T_{135}fm_{23} + T_{235}m_{12}m_{23} \\ &\quad + T_{145}fm_{24} - T_{124}m_{45} - T_{235}m_{13})/T_{123} \end{aligned}$$

erfüllt sind.

Beweis:
Da ein Automorphismus von $G(T)$ natürlich insbesondere ein Isomorphismus $G(T) \to G(T)$ ist, haben wir hier den Spezialfall $t = T$ zu dem Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 4.3.3. Das

bedeutet eine Matrix

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ 0 & 0 & 0 & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & m_{55} \end{pmatrix}$$

mit $m_{ij} \in \mathbb{Z}$ und Diagonalelementen $m_{ii}, 1 \leq i \leq 5 \in \{\pm 1\}$ liegt in $\mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$. Eine solche Matrix korrespondiert nach Lemma 3.1.1 genau dann zu einem Automorphismus von $G(T)$, falls die durch M definierten Bilder die Relationen von $G(T)$ erfüllen. Nach den Rechnungen aus dem Beweis von Satz 5.2.1 ist das äquivalent dazu, dass folgende Gleichungen erfüllt sind

$$\begin{array}{lll}
(1)\ \ T_{123}m_{33} & = & T_{123}m_{11}m_{22}, \\
(2)\ \ T_{235}m_{55} & = & T_{235}m_{22}m_{33}, \\
(3)\ \ T_{145}m_{55} & = & T_{145}m_{11}m_{44}, \\
(4)\ \ T_{134}m_{44} & = & T_{134}m_{11}m_{33}, \\
(5)\ \ T_{124}m_{44} + T_{123}m_{34} & = & T_{124}m_{22}m_{11} + T_{134}m_{23}m_{11} \\
 & & +T_{123}T_{134}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2, \\
(6)\ \ T_{134}m_{45} + T_{135}m_{55} & = & T_{235}m_{33}m_{12} + T_{145}m_{34}m_{11} + T_{135}m_{33}m_{11} \\
 & & +T_{134}T_{145}m_{33}m_{11}(m_{11}-1)/2, \\
(7)\ \ T_{124}m_{45} + T_{125}m_{55} & & \\
\quad +T_{235}m_{13}m_{22} + T_{123}m_{35} & = & T_{235}m_{23}m_{12} + T_{145}m_{24}m_{11} + T_{135}m_{23}m_{11} \\
 & & +T_{125}m_{22}m_{11} + T_{123}T_{235}m_{11}m_{22}(m_{22}-1)/2 \\
 & & +T_{134}T_{145}m_{23}m_{11}(m_{11}-1)/2 + T_{123}T_{235}m_{22}m_{12}m_{11} \\
 & & +(T_{123}T_{135} + T_{124}T_{145})m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2 \\
 & & +T_{123}T_{134}T_{145}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)(m_{11}-2)/6.
\end{array}$$

Die Gleichungen können wir umformen zu

$$\begin{array}{lll}
(1)\ \ T_{123}(m_{33} - m_{11}m_{22}) & = & 0, \\
(2)\ \ T_{235}(m_{55} - m_{22}m_{33}) & = & 0, \\
(3)\ \ T_{145}(m_{55} - m_{11}m_{44}) & = & 0, \\
(4)\ \ T_{134}(m_{44} - m_{11}m_{33}) & = & 0, \\
(5)\ \ T_{124}(m_{44} - m_{22}m_{11}) & = & +T_{134}m_{23}m_{11} - T_{123}m_{34} \\
 & & +T_{123}T_{134}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2, \\
(6)\ \ T_{135}(m_{55} - m_{33}m_{11}) & = & T_{235}m_{33}m_{12} + T_{145}m_{34}m_{11} - T_{134}m_{45}, \\
 & & +T_{134}T_{145}m_{33}m_{11}(m_{11}-1)/2, \\
(7)\ \ T_{125}(m_{55} - m_{22}m_{11}) & = & T_{235}m_{23}m_{12} + T_{145}m_{24}m_{11} + T_{135}m_{23}m_{11} \\
 & & +T_{123}T_{235}m_{11}m_{22}(m_{22}-1)/2 \\
 & & +T_{134}T_{145}m_{23}m_{11}(m_{11}-1)/2 + T_{123}T_{235}m_{22}m_{12}m_{11} \\
 & & +(T_{123}T_{135} + T_{124}T_{145})m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2 \\
 & & +T_{123}T_{134}T_{145}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)(m_{11}-2)/6 \\
 & & -T_{124}m_{45} - T_{235}m_{13}m_{22} - T_{123}m_{35}.
\end{array}$$

Wir definieren $f = m_{11}$ und rekapitulieren, dass $m_{ii} \in \{\pm 1\}$ für $1 \le i \le 5$ gilt. Dann sind die Gleichungen (1)-(4) genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\begin{aligned} m_{33} &= fm_{22}, \\ m_{44} &= m_{22}, \\ m_{55} &= fm_{22}. \end{aligned}$$

Damit sind die Diagonalelemente von M bestimmt. Kommen wir nun zur Auswertung der Gleichungen (5)-(7). Mit den beschriebenen Ersetzungen reduzieren diese sich zu

$$\begin{aligned} (1-f)m_{22}T_{124} &= T_{123}T_{134}m_{22}(1-f)/2 + T_{134}fm_{23} - T_{123}m_{34}, \\ (1-f)m_{22}T_{135} &= T_{134}T_{145}m_{22}(1-f)/2 + T_{235}m_{12} + T_{145}m_{34} - T_{134}fm_{45}, \\ 0 &= T_{123}T_{134}T_{145}m_{22}(1-f)/2 + T_{134}T_{145}m_{23}(f-1)/2 + T_{123}T_{135}m_{22}(f-1)/2 \\ &\quad +T_{124}T_{145}m_{22}(f-1)/2 + T_{135}m_{23} + T_{235}fm_{12}m_{23} + T_{145}m_{24} \\ &\quad -T_{124}fm_{45} + T_{123}T_{235}m_{12} - T_{235}fm_{13} - T_{123}fm_{35}. \end{aligned}$$

Nun gilt es die restlichen freien Parameter aus $\mathbb{Z}$ zu bestimmen, die diese Bedingungen erfüllen. Dazu lösen wir diese Gleichungen nach den freien Parametern m_{23}, m_{45} beziehungsweise m_{35} auf und erhalten

$$\begin{aligned} m_{23} &= m_{22}((f-1)T_{124} + fT_{123}m_{34})/T_{134} - T_{123}(f-1)/2, \\ m_{45} &= m_{22}(fm_{12}T_{235} + fm_{34}T_{145} + T_{135}(1-f))/T_{134} + T_{145}(f-1)/2, \\ m_{35} &= T_{134}T_{145}m_{22}(f-1)/2 + T_{135}m_{22}(1-f)/2 + T_{235}m_{12}f + (T_{134}T_{145}m_{23}(1-f)/2 \\ &\quad +T_{124}T_{145}m_{22}(1-f)/2 + T_{135}fm_{23} + T_{235}m_{12}m_{23} \\ &\quad +T_{145}fm_{24} - T_{124}m_{45} - T_{235}m_{13})/T_{123}. \end{aligned}$$

Dies sind genau die im Satz geforderten Bedingungen. □

Bei der Interpretation von Satz 5.3.1 muss man einige Zusammenhänge beachten. Zuerst stellen wir Folgendes fest.

Bemerkung 5.3.2

- *Der Typ von $G(T)$ impliziert $T_{123}T_{134}T_{145} \neq 0$. Damit sind die Bedingungen an m_{23}, m_{45} und m_{35} wohldefiniert.*
- *Es gelte $d = \operatorname{ggT}(T_{123}, T_{134})$ und $g' = \operatorname{ggT}(T_{235}, T_{134}, T_{145})$. Die Gleichungen für m_{23} und m_{45} lassen sich nach Lemma 2.2.1 und dem Beweis von Satz 5.3.1 darstellen als $(1-f)T_{124} = k_1 d$ mit $k_1 \in \mathbb{Z}$ und $(1-f)T_{135} = k_2 g'$ mit $k_2 \in \mathbb{Z}$. Da Bemerkung 2.1.1 impliziert, dass $T_{124} \in \{0, \ldots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor\}$ gilt, gilt $f = 1$ oder $T_{124} \in \{0, \frac{d}{2}\}$ und $T_{135} \mid \frac{g'}{2}$.*

Des Weiteren gilt es zu beachten, dass die Matrix M aus Satz 5.3.1 nur ganzzahlige Einträge enthalten darf. Da die Bedingungen an m_{23}, m_{45} und m_{35} nicht unabhängig voneinander sind, folgt, dass eine explizite Beschreibung der Lösungsmenge nicht so einfach zu geben ist wie bei den Typen $(2,1,1)$ und $(3,1,1)$.

Bemerkung 5.3.3
Die Menge der Parameter m_{ij}, die den Automorphismus von $G(T)$ beschreiben, entspricht den Lösungen eines nicht-linearen Gleichungssystems. Wir definieren

$$M = (m_{12}, m_{13}, m_{23}, m_{24}, m_{34}, m_{35}, m_{45}, m_{12}m_{23}) \text{ und}$$

$$V \quad = \quad m_{22}\frac{(f-1)}{2}(2T_{124} - T_{123}T_{134}, 2T_{135} + T_{134}T_{145}, T_{123}T_{134}T_{145} + T_{123}T_{135} + T_{124}T_{145}).$$

Dann wird die Menge der Automorphismen von $G(T)$ durch diejenigen m_{ij} beschrieben, welche das folgende Gleichungssystem lösen

$$M \begin{pmatrix} 0 & -T_{235} & T_{123}T_{235} \\ 0 & 0 & -fT_{235} \\ -fT_{134} & 0 & \frac{(f-1)}{2}T_{134}T_{145} + T_{135} \\ 0 & 0 & T_{145} \\ T_{123} & -T_{145} & 0 \\ 0 & 0 & -T_{123} \\ 0 & fT_{134} & -T_{124} \\ 0 & 0 & T_{235} \end{pmatrix} = V.$$

Insbesondere erhalten wir für $f = 1$ ein homogenes und für $f = -1$ ein inhomogenes Gleichungssystem. Für den Spezialfall $T_{235} = 0$ ergibt sich ein lineares Gleichungssystem, das relativ leicht zu lösen ist.

5.4 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir die theoretischen Erkenntnisse aus den letzten beiden Abschnitten auf einige konkrete Gruppen anwenden.

Beispiel 5.4.1
Sei $G \cong G(t)$ mit $t = (-8, -17, 19, -16, 8, -12, 0)$. Dann ist G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2, 1, 1, 1)$ und hat eine $\mathcal{T}$-Präsentation in Erzeugern $g_1 \ldots, g_5$, so dass g_2 und g_4 beziehungsweise g_3 und g_4 kommutieren. Die nicht-trivialen Relationen haben folgende Form

$$\begin{aligned} g_2g_1 &= g_1g_2g_3^{-8}g_4^{-17}g_5^{19}, \\ g_3g_1 &= g_1g_3g_4^{-16}g_5^{8}, \\ g_4g_1 &= g_1g_4g_5^{-12}, \\ g_3g_2 &= g_2g_3g_5^{0}. \end{aligned}$$

Da die kanonische Form dieses Typs bezüglich einer Wohlordnung auf $\mathbb{Z}^s$ definiert wird, müssen wir zuerst eine solche festlegen. Wir definieren eine Wohlordnung $\ll$ auf $\mathbb{Z}$ durch $0 \ll 1 \ll 2 \ll \ldots \ll -1 \ll -2 \ll \ldots$ und erweitern diese zu einer Wohlordnung auf $\mathbb{Z}^s$ lexikographisch.
Nun wollen wir T so bestimmen, dass $G(T)$ bezüglich $\ll$ die in Satz 5.2.1 beschriebene Form für diesen Isomorphietyp hat. Dazu betrachten wir die Sequenz $t = (-\mathbf{8}, -17, 19, -\mathbf{16}, 8, -\mathbf{12}, \mathbf{0})$ etwas genauer. Bei den fett gedruckten Einträgen kann nur das Vorzeichen geändert werden. In der kanonischen Form werden sie mit positivem Vorzeichen angegeben. Als Nächstes wird der zweite Eintrag verändert. Dazu berechnen wir

$$d = \mathrm{ggT}(-8, -16) = 8$$

mit kanonischer Dekomposition $8 = u_1 \cdot (-8) + u_2 \cdot (-16) = 1 \cdot (-8) + (-1) \cdot (-16)$. Damit gilt

$$T_{124} = \mathrm{Min}(-17 \bmod 8, -(-17) \bmod 8) = \mathrm{Min}(7, 1) = 1.$$

Also ist das Vorzeichen e bei dieser Reduktion eindeutig als -1 bestimmt und wir erhalten

$$n = -(e(-17) \text{ div } d) = -(17 \text{ div } 8) = -\left(\frac{17-1}{8}\right) = -2.$$

Der fünfte Eintrag aus t wird als Nächster reduziert. Dazu berechnen wir, wie in Satz 5.2.1 angegeben, folgende Werte

$$\begin{aligned}
p &= \mathrm{ggT}(-16, 0) \\
&= 16 \\
&\quad \text{mit kanonischer Dekomposition} \\
16 &= v_1 \cdot (-16) + v_2 \cdot 0 \\
&= (-1) \cdot (-16) + 0 \cdot 0, \\
\\
e_1 &= \mathrm{sign}(-8) \cdot \mathrm{sign}(-12) \cdot e \\
&= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1, \\
\\
c_1 &= -\,\mathrm{sign}(-8) \cdot \mathrm{sign}(-12) \cdot (-12) \cdot u_1 \cdot n \\
&= -\,(-1) \cdot (-1) \cdot (-12) \cdot 1 \cdot (-2) \\
&= -\,24, \\
\\
l &= n \cdot (-12) \cdot \left(\frac{-16}{d}\right) \\
&= (-2) \cdot (-12) \cdot \left(-\frac{16}{8}\right) \\
&= -\,48, \\
\\
g &= \mathrm{ggT}(-16, 0, l) \\
&= \mathrm{ggT}(-16, 0, -48) \\
&= 16 \\
&\quad \text{mit kanonischer Dekomposition} \\
16 &= w_1 \cdot (-16) + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot (-48) \\
&= 2 \cdot (-16) + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-48).
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir folgende Reduktion

$$T_{135} = (e_1 \cdot 8 + c_1) \bmod g = (-8 - 24) \bmod 16 = 0.$$

Zur Reduktion des dritten Eintrags benötigen wir

$$\begin{aligned}
e_2 &= \mathrm{sign}(-8) \cdot \mathrm{sign}(-16) \cdot \mathrm{sign}(-12) \\
&= -\,1, \\
\\
m &= -\,(e_1 \cdot 8 + c_1) \text{ div } g \\
&= -\,(-8 - 24) \text{ div } 16 \\
&= -\left(\frac{-32 - 0}{16}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2,\\
c_2 &= \operatorname{sign}(-16)\cdot((-16)\cdot w_1\cdot m\cdot u_2\cdot n + e\cdot(-17)\cdot w_1\cdot m\\
&\qquad + e_1\cdot 8\cdot u_2\cdot n + e\cdot 8\cdot\left(\frac{-8}{d}\right)\cdot w_3\cdot n\cdot m)\\
&= \operatorname{sign}(-16)\cdot((-16)\cdot 2\cdot 2\cdot(-1)\cdot(-2) + (-1)\cdot(-17)\cdot 2\cdot 2\\
&\qquad + (-1)\cdot 8\cdot(-1)\cdot(-2) + (-1)\cdot 8\cdot\left(-\frac{8}{8}\right)\cdot(-1)\cdot(-2)\cdot 2)\\
&= -(-128+68-16+32)\\
&= 44,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
k &= m\cdot(-17)\cdot\left(\frac{0}{p}\right)\\
&= 2\cdot(-17)\cdot\left(\frac{0}{16}\right)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
o &= m\cdot(8\cdot n\left(\frac{-8}{d}\right)\cdot\left(\frac{p}{g}\right) - (-17)\cdot v_1\left(\frac{l}{g}\right)\\
&= 2\cdot(8\cdot(-2)\left(-\frac{8}{8}\right)\cdot\left(\frac{16}{16}\right) - (-17)\cdot(-1)\left(-\frac{48}{16}\right)\\
&= 2\cdot(16+51)\\
&= 134,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
h &= \operatorname{ggT}(-8,-12,0,k,o)\\
&= \operatorname{ggT}(-8,-12,0,0,138)\\
&= 2.
\end{aligned}
$$

Daraus ergibt sich folgende Reduktion

$$T_{125} = (e_2\cdot 19 + c_2) \bmod h = (-19+44) \bmod 2 = 1.$$

Zusammenfassend erhalten wir für T folgendes Ergebnis

$$
\begin{aligned}
T_{123} &= |-8| &&= 8,\\
T_{134} &= |-16| &&= 16,\\
T_{145} &= |-12| &&= 12,\\
T_{235} &= |0| &&= 0,\\
T_{124} &= 17 \bmod 8 &&= 1,\\
T_{135} &= -32 \bmod 16 &&= 0,\\
T_{125} &= 25 \bmod 2 &&= 1.
\end{aligned}
$$

Damit gilt $\mathrm{Cf}_{\ll}(t) = (8,1,1,16,0,12,0)$ und G besitzt eine $\mathcal{T}$-Präsentation, deren nicht-triviale Relationen beschrieben sind durch

$$g_2g_1 = g_1g_2g_3^8g_4g_5,$$

$$\begin{aligned} g_3 g_1 &= g_1 g_3 g_4^{16}, \\ g_4 g_1 &= g_1 g_4 g_5^{12}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Automorphismengruppe von $G(T)$. Es gilt $T_{124} = 1 \notin \{0, \frac{8}{2}\}$. Damit gilt nach Bemerkung 5.3.2 die in Satz 5.3.1 beschriebenen Form von M mit $f = 1$. Ebenfalls nach Satz 5.3.1 gilt $m_{23} = \frac{8m_{34}m_{22}}{16}$. Da m_{23} ganzzahlig werden muss, folgt für ein beliebiges $x \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} m_{34} &= 2x, \\ m_{23} &= xm_{22}. \end{aligned}$$

Weiter gilt $m_{45} = \frac{12m_{34}m_{22}}{16} = \frac{24xm_{22}}{16} = \frac{3xm_{22}}{2}$. Da m_{45} ganzzahlig werden muss, folgt für ein beliebiges $y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} x &= 2y, \\ m_{45} &= 3ym_{22}. \end{aligned}$$

Nun berechnen wir $m_{35} = \frac{12m_{24} - m_{45}}{8} = \frac{12m_{24} - 3ym_{22}}{8} = \frac{3(4m_{24} - ym_{22})}{8}$. Wir erhalten für beliebige $u, z \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} m_{24} &= u, \\ m_{35} &= 3z. \end{aligned}$$

Damit folgt $y = m_{22}(4u - 8z)$ und $x = m_{22}(8u - 16z)$ und ein Automorphismus von $G(T)$ korrespondiert zu folgender Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & m_{22}(8u - 16z) & u & * \\ 0 & 0 & 1 & m_{22}(16u - 32z) & 3z \\ 0 & 0 & 0 & 1 & m_{22}(12u - 24z) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Z}),$$

wobei $*$ für ein beliebiges Element aus $\mathbb{Z}$ steht und $u, z \in \mathbb{Z}$ beliebig gilt.

Nach Bemerkung 5.2.2 hängt die kanonische Form von der zu Grunde liegenden Wohlordnung auf $\mathbb{Z}^n$ ab. Diesen Umstand wollen wir nun genauer untersuchen. Dazu betrachten wir im folgenden Beispiel erneut die Gruppe aus Beispiel 5.4.1, aber diesmal unter einer anderen Wohlordnung.

Beispiel 5.4.2
Wir nehmen wieder die Gruppe $G \cong G(t)$ mit $t = (-8, -17, 19, -16, 8, -12, 0)$. Diesmal wollen wir die kanonische Form von G unter der durch $0 \ll^* -1 \ll^* -2 \ll^* \ldots \ll^* 1 \ll^* 2 \ll^* \ldots$ auf $\mathbb{Z}$ definierten und lexikographisch auf $\mathbb{Z}^s$ erweiterten Wohlordnung $\ll^*$ betrachten. Als Erstes müssen wir herausfinden, an welchen Stellen $\ll^*$ Einfluss auf den Algorithmus nimmt. Dies geschieht nur bei der kanonischen Dekomposition des ggT. Das bedeutet, dass die ersten beiden Schritte unverändert bleiben. Lediglich die Reduktionen zu T_{125} und T_{135} sind betroffen. Wir erhalten unter $\ll^*$ folgende kanonische Dekompositionen

$$\begin{aligned} d &= 8 &&= u_1 \cdot (-8) + u_2 \cdot (-16) &&= (-1) \cdot (-8) + 0 \cdot (-16), \\ p &= 16 &&= v_1 \cdot (-16) + v_2 \cdot 0 &&= (-1) \cdot (-16) + 0 \cdot 0, \\ g &= 16 &&= w_1 \cdot (-16) + w_2 \cdot 0 + w_3 \cdot (-48) &&= (-1) \cdot (-16) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-48). \end{aligned}$$

Dadurch verändern sich folgende Konstanten

$$\begin{aligned} c_1 &= 24, \\ m &= -1, \\ c_2 &= -17, \\ o &= 67, \\ h &= 1. \end{aligned}$$

Damit ergeben sich folgende Reduktionen

$$\begin{aligned} T_{135} &= (e_1 \cdot 8 \ + c_1) \bmod g &&= (-8 \ + 24) \bmod 16 = 0, \\ T_{125} &= (e_2 \cdot 19 + c_2) \bmod h &&= (-19 - 44) \bmod 1 = 0 \end{aligned}$$

und $G(T)$ mit $T = \mathrm{Cf}_{\ll^*}(t) = (8, 1, 0, 16, 0, 12, 0)$ ist die kanonische Form für G bezüglich $\ll^*$. Da die Werte für $-8 - 24 \bmod 16$ und $-8 + 24 \bmod 16$ übereinstimmen, erhalten wir für T_{135} bezüglich $\ll^*$ das selbe Ergebnis wie bezüglich $\ll$. Der Wert von T_{125} weicht allerdings ab und wir stellen fest, dass sich die kanonischen Formen von G bezüglich $\ll$ und $\ll^*$ unterscheiden.

Betrachten wir zum Abschluss dieses Kapitels noch ein Beispiel zum Isomorphieproblem. Gruppen dieses Typs mit der am Anfang dieses Kapitels beschriebenen Präsentation können nur dann isomorph zueinander sein, wenn sie sich in den Einträgen $t_{123}, t_{134}, t_{145}$ und t_{145} nur um ein Vorzeichen unterscheiden. Demnach kann man Gruppen, die dieses Kriterium nicht erfüllen, auf den ersten Blick als nicht isomorph erkennen.

Beispiel 5.4.3
Seien die $\mathcal{T}$-Gruppen G_1, G_2 und G_3 vom Typ $(2, 1, 1, 1)$ gegeben. Es gelte $G_1 \cong G(t_1), G_2 \cong G(t_2)$ und $G_3 \cong G(t_3)$ mit

$$\begin{aligned} t_1 &= (-15, -31, 93, 12, 31, 21, 4), \\ t_2 &= (15, 57, -61, -12, 83, 21, -4), \\ t_3 &= (15, -37, -53, -12, 31, 21, -4). \end{aligned}$$

Um mittels der kanonischen Form zu bestimmen, ob diese Gruppen isomorph sind, müssen wir für alle drei Gruppen die kanonische Form bezüglich der selben Wohlordnung berechnen. Dann sind die Gruppen nach Folgerung 5.2.2 genau dann isomorph, wenn die kanonische Form übereinstimmt. Wir betrachten im Folgenden wieder $\ll$, die durch $0 \ll 1 \ll 2 \ll \ldots \ll -1 \ll -2 \ll \ldots$ definierte Wohlordnung auf $\mathbb{Z}$, und erweitern diese zu einer Wohlordnung auf Z^s lexikographisch. Wenn wir nun den Algorithmus aus Satz 5.2.1 anwenden, um die kanonische Form zu berechnen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Cf}_{\ll}(t_1) &= (15, 1, 0, 12, 1, 21, 4), \\ \mathrm{Cf}_{\ll}(t_2) &= (15, 0, 0, 12, 0, 21, 4), \\ \mathrm{Cf}_{\ll}(t_3) &= (15, 1, 0, 12, 1, 21, 4). \end{aligned}$$

Damit sind G_1 und G_3 isomorph zueinander und G_2 ist nicht isomorph zu den anderen.

Kapitel 6

Klassifikation der $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (2,1,2)

In diesem Kapitel klassifizieren wir die $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ $(2, 1, 2)$ bis auf Isomorphie, indem wir eine kanonische Form angeben.

6.1 Einführung

Ein wichtiges Hilfsmittel bei dieser Klassifikation sind die Matrixgruppen über $\mathbb{Z}$. Deshalb untersuchen wir zuerst einige Aspekte der $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Dazu definieren wir für $k \in \mathbb{N}$ die Untergruppe

$$D_k = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \;\middle|\; k \text{ teilt } b \right\}.$$

Lemma 6.1.1
Mit obiger Definition ist D_k eine Untergruppe von endlichem Index in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. *Man bekommt ein endliches Erzeugendensystem für die Gruppe D_k durch die Berechnung der Schreier-Erzeuger für* $\mathrm{Stab}_{\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})}(D_k \cdot 1)$, *wobei* $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ *auf den Nebenklassen* $\{D_k \cdot g \mid g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})\}$ *via Multiplikation von rechts operiert.*

Beweis:
Für $k = 1$ gilt die Aussage. Sei im Folgenden $k \geq 2$. Wir betrachten den kanonischen Homomorphismus $\varphi : \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. Sei U_k die Untergruppe der unteren Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$. Wir zeigen, dass der Index $[\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) : D_k]$ gleich dem Index $[\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) : U_k]$ und damit endlich ist.

Die Untergruppe D_k ist das volle Urbild von $U_k \cap \mathrm{Bild}(\varphi)$ unter φ. Darüber hinaus ist $\mathrm{Kern}(\varphi)$ in D_k enthalten und es gelten folgende Isomorphien

$$\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})/\mathrm{Kern}(\varphi) \;\cong\; \varphi(\mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})) \leq \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}),$$

$$D_k/\mathrm{Kern}(\varphi) \quad \cong \quad \varphi(D_k) \leq U_k.$$

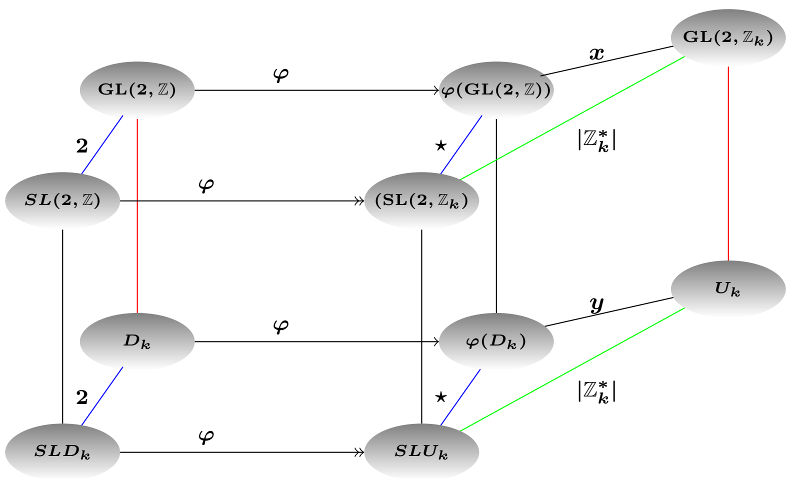
Zusammen mit der Endlichkeit von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ und U_k folgt daraus für gewisse $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{array}{llcl} (1) & |\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})| & = & x \cdot |\varphi(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}))| \\ & & = & x \cdot [\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) : (\varphi)], \\ (2) & |U_k| & = & y \cdot |\varphi(D_k)| \\ & & = & y \cdot [D_k : \mathrm{Kern}(\varphi)]. \end{array}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} [\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) : U_k] &= |\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})|/|U_k| \\ &= (x \cdot [\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) : \mathrm{Kern}(\varphi)])/(y \cdot [D_k : \mathrm{Kern}(\varphi)]) \\ &= \left(\frac{x}{y}\right)[\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) : D_k][D_k : \mathrm{Kern}(\varphi)]/[D_k : \mathrm{Kern}(\varphi)] \\ &= \left(\frac{x}{y}\right)[\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) : D_k]. \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass $x = y$ gilt. Dazu betrachten wir das folgende Diagramm.



- $\mathbb{Z}_k := \mathbb{Z}/k\mathbb{Z}$.
- $\varphi : \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$, $X \mapsto X \bmod k$.
- U_k : Untergruppe der unteren Dreiecksmatrizen in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$.
- $SLD_k \leq D_k$: Untergruppe der Elemente mit Determinante 1.
- $SLU_k \leq U_k$: Untergruppe der Elemente mit Determinante 1.
- $\star = \begin{cases} 1, & falls\ k = 2, \\ 2, & sonst. \end{cases}$

Die Zusammenhänge $\varphi(\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})) = \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ beziehungsweise $\varphi(SLD_k) = SLU_k$ scheinen bekannt zu sein. Der Vollständigkeit halber geben wir einen kurzen Beweis. Dazu sei

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}).$$

Der chinesische Restklassensatz liefert ein $b' \in \mathbb{Z}$ mit $b' \equiv b \bmod k$ und $\mathrm{ggT}(a, b') = 1$. Damit existieren $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $ax - b'y = 1$. Nun wählen wir

$$\begin{aligned} c' &= c + y(1 - (ad - b'c)), \\ d' &= d + x(1 - (ad - b'c)). \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{pmatrix} a & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \bmod k$$

und die Zusammenhänge sind gezeigt.

Das bedeutet für den Fall $k = 2$, dass x und y beide den Wert 1 haben, also insbesondere übereinstimmen. Sei im Folgenden $k > 2$. Wir betrachten den Index $[\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})]$ beziehungsweise den Index $[U_k : SLU_k]$. Zu jedem Element aus $\mathbb{Z}_k^*$ gibt es genau eine Nebenklasse. Das gilt, weil zwei Matrizen aus $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ genau dann in der selben Nebenklasse liegen, wenn sie dieselbe Determinante haben und es zu jedem Element aus $a \in \mathbb{Z}^*$ eine Matrix in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ mit Determinante a gibt. Daher gelten $[\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}] = |\mathbb{Z}_k^*|$ und $[U_k : SLU_k] = |\mathbb{Z}_k^*|$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
|\mathbb{Z}_k^*| &= [\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})] \\
&= [\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) : \varphi(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}))] \cdot [\varphi(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})) : \mathrm{SL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}] \\
&= [\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) : \varphi(\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}))] \cdot 2, \\
|\mathbb{Z}_k^*| &= [U_k : SLU_k] \\
&= [U_k : \varphi(D_k)] \cdot [\varphi(D_k) : SLU_k] \\
&= [U_k : \varphi(D_k)] \cdot 2.
\end{aligned}$$

Man bedenke, dass $\mathbb{Z}_k^*$ für $k > 2$ die Untergruppe $\{\pm 1\}$ enthält und somit eine gerade Ordnung hat. Daher gilt $x = y = \frac{|\mathbb{Z}_k^*|}{2}$. Insbesondere stimmen x und y für alle $k \in \mathbb{N}$ überein. $\square$

Der Beweis von Lemma 6.1.1 impliziert, dass man den Index von D_k in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ explizit berechnen kann.

Lemma 6.1.2
Sei $k = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ eine Zerlegung von k in paarweise verschiedene Primfaktoren $p_1, \ldots, p_r$ mit $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$. Dann gilt folgende Formel

$$[\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) : D_k] = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i - 1}(p_i + 1).$$

Beweis:
Wir bestimmen den Index $[\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) : U_k]$. Dazu müssen wir die Ordnungen von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})$ und U_k berechnen. Dies erreichen wir schrittweise. Sei zunächst $k = p^s$ für eine Primzahl p und $s \in \mathbb{N}$. Dann hat die Ordnung von U_{p^s} die Form $|U_{p^s}| = p(p-1)^2 p^{3(s-1)}$. Dies zeigen wir mittels Induktion. Für $s = 1$ gilt $p(p-1)^2 p^{3(1-1)} = p(p-1)^2 = |U_p|$ und damit stimmt die Formel. Sei nun $s > 1$. Wir betrachten den Epimorphismus

$$\varphi : U_{p^s} \longrightarrow U_{p^{s-1}},\ X \mapsto X \bmod p^{s-1}.$$

Dann hat der Kern von φ die Form

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}(\varphi) &= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, d \bmod p^{s-1} \equiv 1, c \bmod p^{s-1} \equiv 0 \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, d \in \{1 + np^{s-1} \mid 0 \leq n \leq p-1\}, c \in \{np^{s-1} \mid 0 \leq n \leq p-1\} \right\}.
\end{aligned}$$

Damit hat der Kern von φ die Ordnung $|\mathrm{Kern}(\varphi)| = p^2 \cdot p = p^3$. Aus $U_{p^{s-1}} \cong U_{p^s}/\mathrm{Kern}(\varphi)$ folgt nun

$$|U_{p^s}| = |U_{p^{s-1}}||\mathrm{Kern}(\varphi)| = p(p-1)^2 p^{3(s-2)} p^3 = p(p-1)^2 p^{3(s-1)}.$$

Die Ordnung von $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})$ erhält man durch die Formel $|\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})| = (p^2-1)(p^2-p)p^{4(s-1)}$. Dies zeigen wir ebenfalls mittels Induktion. Für $s = 1$ gilt $(p^2-1)(p^2-p)p^{4(1-1)} =$

$(p^2-1)(p^2-p) = |\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})|$ und damit stimmt die Formel. Sei nun $s > 1$. Wir betrachten den Epimorphismus

$$\varphi : \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}) \longrightarrow \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^{s-1}\mathbb{Z}),\ X \mapsto X \bmod p^{s-1}.$$

Dann hat der Kern von φ die Form

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kern}(\varphi) &= \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| a,d \bmod p^{s-1} \equiv 1, b,c \bmod p^{s-1} \equiv 0 \right\} \\
&= \left\{ \left(\begin{array}{cc} a & b \\ c & d \end{array} \right) \middle| a,d \in \{1+np^{s-1} \mid 0 \le n \le p-1\}, b,c \in \{np^{s-1} \mid 0 \le n \le p-1\} \right\}.
\end{aligned}$$

Damit hat der Kern von φ die Ordnung $|\mathrm{Kern}(\varphi)| = p^2 \cdot p^2 = p^4$. Aus $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^{s-1}\mathbb{Z}) \cong \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})/\mathrm{Kern}(\varphi)$ folgt nun

$$|\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z})| = |\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^{s-1}\mathbb{Z})||\mathrm{Kern}(\varphi)| = (p^2-1)(p^2-p)p^{4(s-2)}p^3 = (p^2-1)(p^2-p)p^{4(s-1)}.$$

Sei nun $k = p_1^{e_1} \cdots p_r^{e_r}$ mit paarweise verschiedenen Primfaktoren $p_1, \ldots, p_r$ und $e_1, \ldots, e_r \in \mathbb{N}$. Dann gilt Folgendes

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) &= \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^{e_1}\mathbb{Z}) \times \cdots \times \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^{e_r}\mathbb{Z}), \\
|\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})| &= \prod_{i=1}^{r} |\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p^{e_i}\mathbb{Z})|, \\
U_k &= U_{p^{e_1}} \times \cdots \times U_{p^{e_n}}, \\
|U_k| &= \prod_{i=1}^{r} |U_{p^{e_i}}|.
\end{aligned}$$

Damit lässt sich der gesuchte Index wie folgt berechnen

$$\begin{aligned}
[\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}) : U_k] &= \frac{|\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/k\mathbb{Z}|}{|U_k|} = \frac{\prod_{i=1}^r |\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z})|}{\prod_{i=1}^r |U_{p_i^{e_i}}|} \\
&= \prod_{i=1}^{r} \frac{|\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}/p_i^{e_i}\mathbb{Z})|}{|U_{p_i^{e_i}}|} = \prod_{i=1}^{r} \frac{(p_i^2-1)(p_i^2-p_i)p_i^{4(e_i-1)}}{p_i(p_i-1)^2 p_i^{3(e_i-1)}} \\
&= \prod_{i=1}^{r} \frac{p_i(p_i-1)^2(p_i+1)p^{4(e_i-1)}}{p_i(p_i-1)^2 p_i^{3(e_i-1)}} = \prod_{i=1}^{r} p_i^{e_i-1}(p_i+1).
\end{aligned}$$

□

Als weiteres Hilfsmittel definieren wir die Abbildung $^* : D_k \to \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ via

$$\left(\begin{array}{cc} x & y \\ u & v \end{array} \right)^* = (xv-yu) \left(\begin{array}{cc} x & y/k \\ uk & v \end{array} \right).$$

Für * gelten nachstehende Eigenschaften.

Lemma 6.1.3
Mit den Notationen aus den Vorüberlegungen gelten folgende Aussagen.

(a) *Für alle $g \in D_k$ gilt* $\det(g^*) = \det(g) \in \{\pm 1\}$.

(b) *Sei* $k = b/a$ *für* $a, b \in \mathbb{N}$ *mit* $a \mid b$ *und sei* $S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$. *Dann gilt für alle* $g \in D_k$ *die Formel* $\det(g^*)g^*S = Sg$.

Beweis:

(a) Sei $g \in D_k$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(g^*) &= \det\left((xv - yu)\begin{pmatrix} x & y/k \\ uk & v \end{pmatrix}\right) \\ &= (xv - yu)^2(xv - uky/k) = xv - yu \\ &= \det(g) \in \{\pm 1\}. \end{aligned}$$

(b) Sei $g \in D_k$ beliebig. Dann gilt

$$\begin{aligned} \det(g^*)g^*S &= \begin{pmatrix} x & y/k \\ uk & v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & yb/k \\ uka & vb \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & ya \\ ub & vb \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \\ &= Sg. \end{aligned}$$

□

Betrachten wir nun eine beliebige Matrix $L \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Damit ist L eine Matrix von Rang 2 und ihre Smith-Normalform S hat auf der Diagonalen Einträge $a, b \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $a \mid b$. Aus der linearen Algebra ist bekannt, dass Matrizen $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ existieren, für die $AS = LB$ gilt, siehe auch [17, Sec. 8.3].

Lemma 6.1.4

Sei $L \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ *und* S *die dazugehörige Smith-Normalform. Sei* $t \in \{\pm 1\}$. *Dann gibt es Matrizen* $U, V \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ *mit der Eigenschaft*

$$t \det(U)US = LV.$$

Beweis:

Seien $A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ mit $AS = LB$ und sei $h \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ definiert als

$$h = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Da sowohl h als auch S Diagonalmatrizen sind, kommutieren sie und es folgt

$$\begin{aligned} & AS &= LB \\ \iff & (AS)h &= (LB)h \\ \iff & A(Sh) &= L(Bh) \\ \iff & A(hS) &= L(Bh) \\ \iff & (Ah)S &= L(Bh). \end{aligned}$$

Damit bekommen wir die geforderten Matrizen $U, V \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit $t\det(U)US = LV$, indem wir $U \in \{A, Ah\}$ so wählen, dass $\det(U) = t$ erfüllt ist, und indem wir $V \in \{B, Bh\}$ dazu entsprechend wählen. □

Darauf aufbauend definieren wir nun die Menge

$$T = \{(A, B) \mid A, B \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}) \text{ mit } \mathrm{sign}(t_{123})\det(A)AS = LB\}$$

und betrachten folgenden Zusammenhang.

Lemma 6.1.5
Sei die Menge T' wie folgt gegeben

$$T' = \{(Ug^*, Vg) \mid g \in D_k\}.$$

Dann gilt $T = T'$.

Beweis:
"$T' \subseteq T$": Es sind $U, V \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft $t\det(U)US = LV$ gegeben. Sei $g \in D_k$ beliebig. Wir müssen zeigen, dass (Ug^*, Vg) die Bedingungen von T erfüllt. Mit Lemma 6.1.3 gilt

$$\begin{aligned} t\det(Ug^*)Ug^*S &= t\det(U)\det(g^*)Ug^*S \\ &= t\det(U)U\det(g^*)g^*S \\ &= t\det(U)USg \\ &= LVg. \end{aligned}$$

"$T \subseteq T'$": Es sind $A, B \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft $t\det(A)AS = LB$ gegeben. Wir müssen zeigen, dass es ein $g \in D_k$ gibt, so dass $A = Ug^*$ und $B = Vg$ gilt, wobei U und V wieder die Bedingung $t\det(U)US = LV$ erfüllen. Da A und U beziehungsweise B und V in $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ liegen, gibt es $g_1, g_2 \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit $A = Ug_1$ und $B = Vg_2$. Demnach bleibt noch zu zeigen, dass $g_2 \in D_k$ liegt und dass $g_1 = g_2^*$ gilt. Seien g_1 und g_2 definiert als $g_1 = (x_{ij})$ und $g_2 = (y_{ij})$ mit $1 \le i, j \le 2$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & LB &&= t\det(A)AS \\ \iff\ & LVg_2 &&= t\det(Ug_1)Ug_1S \\ \iff\ & LV &&= t\det(U)\det(g_1)Ug_1Sg_2^{-1} \\ \iff\ & t\det(U)US &&= t\det(U)\det(g_1)Ug_1Sg_2^{-1} \\ \iff\ & S &&= \det(g_1)g_1Sg_2^{-1} \\ \iff\ & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} &&= \det(g_1)\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix}\det(g_2) \\ \iff\ & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} &&= \det(g_1)\begin{pmatrix} x_{11}a & x_{12}b \\ x_{21}a & x_{22}b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_{22} & -y_{12} \\ -y_{21} & y_{11} \end{pmatrix}\det(g_2) \\ \iff\ & \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} &&= \det(g_1)\det(g_2)\begin{pmatrix} x_{11}ay_{22} - x_{12}by_{21} & -x_{11}ay_{12} + x_{12}by_{11} \\ x_{21}ay_{22} - x_{22}by_{21} & -x_{21}ay_{12} + x_{22}by_{11} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Auf diese Weise erhalten wir vier Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen g_1 und g_2 beschreiben. In der rechten Spalte der rechten Seite der Gleichung kommt in beiden Einträgen der Wert y_{12} vor. Danach aufgelöst erhalten wir

$$y_{12} = \frac{x_{22}y_{11} - \det(g_1)\det(g_2)}{x_{21}}k \quad \text{und} \quad y_{12} = \frac{x_{12}y_{11}}{x_{11}}k.$$

Gleichsetzen ergibt nun

$$\begin{aligned}
& \frac{x_{12}y_{11}}{x_{11}}k && = \frac{x_{22}y_{11}-\det(g_1)\det(g_2)}{x_{21}}k \\
\iff & \frac{x_{12}y_{11}}{x_{11}}k - \frac{x_{22}y_{11}-\det(g_1)\det(g_2)}{x_{21}}k && = 0 \\
\iff & k\left(\frac{x_{12}y_{11}}{x_{11}} - \frac{x_{22}y_{11}-\det(g_1)\det(g_2)}{x_{21}}\right) && = 0 \\
\iff & y_{11}\left(\frac{x_{12}}{x_{11}} - \frac{x_{22}}{x_{21}}\right) + \frac{\det(g_1)\det(g_2)}{x_{21}} && = 0 \\
\iff & y_{11}\frac{x_{12}x_{21}-x_{22}x_{11}}{x_{11}x_{21}} + \frac{\det(g_1)\det(g_2)}{x_{21}} && = 0 \\
\iff & y_{11}\frac{-\det(g_1)}{x_{11}x_{21}} && = -\frac{\det(g_1)\det(g_2)}{x_{21}} \\
\iff & y_{11} && = x_{11}\det(g_2).
\end{aligned}$$

Wenn wir dies Ergebnis nun in die zweite Gleichung für y_{12} einsetzen, erhalten wir $y_{12} = x_{12}\det(g_2)k$. Damit liegt g_2 in D_k. Analog kann man nun y_{21} und y_{22} bestimmen und erhält den gewünschten Zusammenhang. □

Bevor wir zu der angestrebten kanonischen Form kommen können, brauchen wir noch ein weiteres Hilfsmittel. Dazu definieren wir für $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $a \mid b$ und $k = b/a$ die Menge

$$L(a, b, c) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid 0 \leq x < \mathrm{ggT}(a, c), 0 \leq y < \mathrm{ggT}(b, c)\}.$$

Dann operiert D_k auf $L(a, b, c)$ via $(x, y)g \bmod (\mathrm{ggT}(a, c), \mathrm{ggT}(b, c))$. Das bedeutet, dass zuerst mit g von rechts multipliziert wird und dann das Ergebnis in der ersten Komponente modulo $\mathrm{ggT}(a, c)$ und in der zweiten Komponente modulo $\mathrm{ggT}(b, c)$ reduziert wird. Für zwei Elemente $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in (a, b, c)$ schreiben wir $(x_1, y_1) \leq (x_2, y_2)$, wenn entweder $x_1 \leq x_2$ gilt oder wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 \leq y_2$ gelten. Da $L(a, b, c)$ eine endliche Menge ist, ist die Anzahl der Bahnen unter der Operation von D_k auf dieser Menge endlich. Wir definieren $\mathcal{O}(a, b, c)$ als vollständiges und irredundantes Repräsentantensystem für die Bahnen unter dieser Operation, so dass für jede Bahn das minimale Element als Repräsentant gewählt wird.

6.2 Die kanonische Form

Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2, 1, 2)$. Dann hat G die Isolatorreihe

$$G = I_1(G) > I_2(G) > I_3(G) > I_4(G) = \{1\}$$

mit der Eigenschaft, dass $I_1(G)/I_2(G)$ frei abelsch vom Rang 2, $I_2(G)/I_3(G)$ frei abelsch vom Rang 1 und $I_3(G)/I_4(G)$ frei abelsch vom Rang 2 ist. Wir wählen eine $\mathcal{T}$-Sequenz $(g_1, \ldots, g_5)$ für G, welche diese Reihe verfeinert. Damit ist $\langle g_4, g_5\rangle$ zentral in G und G hat eine $\mathcal{T}$-Präsentation in $g_1, \ldots, g_5$, deren nicht-triviale Relationen folgende Form haben

$$(\star) \qquad \begin{aligned}
g_2g_1 &= g_1g_2g_3^{t_{123}}g_4^{t_{124}}g_5^{t_{125}}, \\
g_3g_1 &= g_1g_3g_4^{t_{134}}g_5^{t_{135}}, \\
g_3g_2 &= g_2g_3g_4^{t_{234}}g_5^{t_{235}}.
\end{aligned}$$

Es gilt $t_{ijk} \in \mathbb{Z}$. Der Typ von G liefert, dass $t_{123} \neq 0$ gilt und dass die ganzzahligen Vektoren (t_{134}, t_{135}) und (t_{234}, t_{235}) linear unabhängig sind. Satz 3.3.2 zu Folge ist die Präsentation $(\star)$ konsistent. Nach Satz 2.3.5 ist G damit isomorph zu einer $\mathcal{T}$-Gruppe $G(t)$ mit

$$t = (t_{123}, t_{124}, t_{125}, t_{134}, t_{135}, t_{234}, t_{235}) \in \mathbb{Z}^7.$$

Nach Satz 3.2.1 ist die Multiplikation in $G(t)$ gegeben durch die Hallpolynome $p_1, \ldots, p_5$ mit

$$\begin{aligned}
p_1(a,b) &= a_1 + b_1,\\
p_2(a,b) &= a_2 + b_2,\\
p_3(a,b) &= a_3 + b_3 + t_{123}b_1a_2,\\
p_4(a,b) &= a_4 + b_4 + t_{124}a_2b_1 + t_{134}(t_{123}s_2(b_1)a_2 + a_3b_1)\\
&\quad +t_{234}(t_{123}b_1s_2(a_2) + t_{123}b_1b_2a_2 + a_3b_2),\\
p_5(a,b) &= a_5 + b_5 + t_{125}a_2b_1 + t_{135}(t_{123}s_2(b_1)a_2 + a_3b_1)\\
&\quad +t_{235}(t_{123}b_1s_2(a_2) + t_{123}b_1b_2a_2 + a_3b_2).
\end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Polynome wollen wir eine kanonische Form für $G(t)$ und damit für G bestimmen. Dies führt uns zu dem Hauptresultat dieses Kapitels.

Satz 6.2.1
Sei $G(t)$ eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2,1,2)$. Wir definieren

$$L = \begin{pmatrix} t_{134} & t_{135} \\ t_{234} & t_{235} \end{pmatrix}.$$

Der Typ von $G(t)$ impliziert den vollen Rang dieser Matrix. Sei S die Smith-Normalform von L und seien $a, b \in \mathbb{N}$ die Diagonaleinträge von S mit $a \mid b$. Seien $U, V \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit $LV = \mathrm{sign}(t_{123})\det(U)US$. Sei (o_1, o_2) der Bahnenrepräsentant des Vektors $\det(U)(t_{124}, t_{125})V \bmod (\mathrm{ggT}(a, t_{123}), \mathrm{ggT}(b, t_{123}))$ in $\mathcal{O}(a, b, |t_{123}|)$ unter der Operation von $D_{b/a}$. Wir definieren

$$\begin{aligned}
T_{123} &= |t_{123}|,\\
T_{134} &= a,\\
T_{135} &= 0,\\
T_{234} &= 0,\\
T_{235} &= b,\\
T_{124} &= o_1,\\
T_{125} &= o_2.
\end{aligned}$$

Dann ist $G(t)$ isomorph zu $G(T)$. Es gilt $\mathrm{Cf}(t) = T$ und $G(T)$ ist eine kanonische Form für den Isomorphietyp von $G(t)$.

Beweis:
Betrachten wir zuerst die Forderungen des Satzes. Der Typ von $G(t)$ impliziert, dass die Zeilen von L linear unabhängig sind. Damit ist L eine Matrix von Rang 2 und ihre Smith-Normalform S hat auf der Diagonalen Einträge $a, b \in \mathbb{N}$ mit der geforderten Eigenschaft $a \mid b$. Aus Lemma 6.1.4 folgt, dass wir Matrizen $U, V \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit den gewünschten Eigenschaften finden.

Wenden wir uns nun dem Isomorphieproblem zu. Sei

$$M = \left(\begin{array}{cc|c|cc}
m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15}\\
m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25}\\
\hline
0 & 0 & m_{33} & m_{34} & m_{35}\\
\hline
0 & 0 & 0 & m_{44} & m_{45}\\
0 & 0 & 0 & m_{54} & m_{55}
\end{array}\right)$$

eine Matrix mit $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, $m_{33} \in \{\pm 1\}$ und invertierbaren Diagonalblöcken

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_{44} & m_{45} \\ m_{54} & m_{55} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}).$$

Dann gilt $M \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$. Sei $T = (T_{123}, T_{124}, T_{125}, T_{134}, T_{135}, T_{234}, T_{235}) \in \mathbb{Z}^7$. Eine solche Matrix korrespondiert nach Lemma 3.1.1 genau dann zu einem Isomorphismus $G(t) \to G(T)$, falls die durch M definierten Bilder die Relationen von $G(t)$ erfüllen. Das können wir mit Hilfe der Hallpolynome überprüfen. Im Folgenden bezeichnen wir die Zeilen von M mit $m_1, \ldots, m_5$ und die Erzeugenden von $G(T)$ mit $\bar{g}_1, \ldots, \bar{g}_5$. Da $\langle g_4, g_5 \rangle$ zentral in $G(t)$, beziehungsweise $\langle \bar{g}_4, \bar{g}_5 \rangle$ zentral in $G(T)$ ist, brauchen wir nur die nicht-trivialen Relationen zu untersuchen. Betrachten wir zuerst die Gleichung

$$\varphi(g_3)\varphi(g_2) = \varphi(g_2)\varphi(g_3)\varphi(g_4)^{t_{234}}\varphi(g_5)^{t_{235}}.$$

Nun berechnen wir für beide Seiten dieser Gleichung die jeweilige Normalform. Dabei bekommen wir für die linke Seite folgendes Ergebnis

$$\begin{aligned}
\varphi(g_3)\varphi(g_2) &= \bar{g}_3^{m_{33}}\bar{g}_4^{m_{34}}\bar{g}_5^{m_{35}}\bar{g}_1^{m_{21}}\bar{g}_2^{m_{22}}\bar{g}_3^{m_{23}}\bar{g}_4^{m_{24}}\bar{g}_5^{m_{25}} \\
&= \bar{g}_1^{p_1(m_3,m_2)}\bar{g}_2^{p_2(m_3,m_2)}\bar{g}_3^{p_3(m_3,m_2)}\bar{g}_4^{p_4(m_3,m_2)}\bar{g}_5^{p_5(m_3,m_2)} \\
&= \bar{g}_1^{m_{21}}\bar{g}_2^{m_{22}}\bar{g}_3^{m_{33}+m_{23}}\bar{g}_4^{m_{34}+m_{24}+T_{134}m_{33}m_{21}+T_{234}m_{33}m_{22}} \\
&\quad\; \bar{g}_5^{m_{35}+m_{25}+T_{135}m_{33}m_{21}+T_{235}m_{33}m_{22}}.
\end{aligned}$$

Die rechte Seite ergibt

$$\begin{aligned}
\varphi(g_2)\varphi(g_3)\varphi(g_4)^{t_{234}}\varphi(g_5)^{t_{235}} &= \bar{g}_1^{m_{21}}\bar{g}_2^{m_{22}}\bar{g}_3^{m_{23}}\bar{g}_4^{m_{24}}\bar{g}_5^{m_{25}}\bar{g}_3^{m_{33}}\bar{g}_4^{m_{34}}\bar{g}_5^{m_{35}} \\
&\quad\; (\bar{g}_4^{m_{44}}\bar{g}_5^{m_{45}})^{t_{234}}(\bar{g}_4^{m_{54}}\bar{g}_5^{m_{55}})^{t_{235}} \\
&= \bar{g}_1^{p_1(m_2,m_3)}\bar{g}_2^{p_2(m_2,m_3)}\bar{g}_3^{p_3(m_2,m_3)}\bar{g}_4^{p_4(m_2,m_3)}\bar{g}_5^{p_5(m_2,m_3)} \\
&\quad\; \bar{g}_4^{t_{234}m_{44}}\bar{g}_5^{t_{234}m_{45}}\bar{g}_4^{t_{235}m_{54}}\bar{g}_5^{t_{235}m_{55}} \\
&= \bar{g}_1^{p_1(m_2,m_3)}\bar{g}_2^{p_2(m_2,m_3)}\bar{g}_3^{p_3(m_2,m_3)}\bar{g}_4^{p_4(m_2,m_3)}\bar{g}_5^{p_5(m_2,m_3)} \\
&\quad\; \bar{g}_4^{t_{234}m_{44}+t_{235}m_{54}}\bar{g}_5^{t_{234}m_{45}+t_{235}m_{55}} \\
&= \bar{g}_1^{p_1(m_2,m_3)}\bar{g}_2^{p_2(m_2,m_3)}\bar{g}_3^{p_3(m_2,m_3)} \\
&\quad\; \bar{g}_4^{p_4(m_2,m_3)+t_{234}m_{44}+t_{235}m_{54}}\bar{g}_5^{p_5(m_2,m_3)+t_{234}m_{45}+t_{235}m_{55}} \\
&= \bar{g}_1^{m_{21}}\bar{g}_2^{m_{22}}\bar{g}_3^{m_{23}+m_{33}} \\
&\quad\; \bar{g}_4^{m_{24}+m_{34}+t_{234}m_{44}+t_{235}m_{54}}\bar{g}_5^{m_{25}+m_{35}+t_{234}m_{45}+t_{235}m_{55}}.
\end{aligned}$$

Als nächste Relation untersuchen wir

$$\varphi(g_3)\varphi(g_1) = \varphi(g_1)\varphi(g_3)\varphi(g_4)^{t_{134}}\varphi(g_5)^{t_{135}}.$$

Für die linke Seite der Gleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
\varphi(g_3)\varphi(g_1) &= \bar{g}_3^{m_{33}}\bar{g}_4^{m_{34}}\bar{g}_5^{m_{35}}\bar{g}_1^{m_{11}}\bar{g}_2^{m_{12}}\bar{g}_3^{m_{13}}\bar{g}_4^{m_{14}}\bar{g}_5^{m_{15}} \\
&= \bar{g}_1^{p_1(m_3,m_1)}\bar{g}_2^{p_2(m_3,m_1)}\bar{g}_3^{p_3(m_3,m_1)}\bar{g}_4^{p_4(m_3,m_1)}\bar{g}_5^{p_5(m_3,m_1)} \\
&= \bar{g}_1^{m_{11}}\bar{g}_2^{m_{12}}\bar{g}_3^{m_{33}+m_{13}}\bar{g}_4^{m_{34}+m_{14}+T_{134}m_{33}m_{11}+T_{234}m_{33}m_{12}} \\
&\quad\; \bar{g}_5^{m_{35}+m_{15}+T_{135}m_{33}m_{11}+T_{235}m_{33}m_{12}}.
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite berechnen wir

$$\varphi(g_1)\varphi(g_3)\varphi(g_4)^{t_{134}}\varphi(g_5)^{t_{135}} = \bar{g}_1^{m_{11}}\bar{g}_2^{m_{12}}\bar{g}_3^{m_{13}}\bar{g}_4^{m_{14}}\bar{g}_5^{m_{15}}\bar{g}_3^{m_{33}}\bar{g}_4^{m_{34}}\bar{g}_5^{m_{35}}$$

$$\begin{aligned}
&(\bar{g_4}^{m_{44}}\bar{g_5}^{m_{45}})^{t_{134}}(\bar{g_4}^{m_{54}}\bar{g_5}^{m_{55}})^{t_{135}} \\
= \ &\bar{g_1}^{p_1(m_1,m_3)}\bar{g_2}^{p_2(m_1,m_3)}\bar{g_3}^{p_3(m_1,m_3)}\bar{g_4}^{p_4(m_1,m_3)}\bar{g_5}^{p_5(m_1,m_3)} \\
&\bar{g_4}^{t_{134}m_{44}}\bar{g_5}^{t_{134}m_{45}}\bar{g_4}^{t_{135}m_{54}}\bar{g_5}^{t_{135}m_{55}} \\
= \ &\bar{g_1}^{p_1(m_1,m_3)}\bar{g_2}^{p_2(m_1,m_3)}\bar{g_3}^{p_3(m_1,m_3)}\bar{g_4}^{p_4(m_1,m_3)}\bar{g_5}^{p_5(m_1,m_3)} \\
&\bar{g_4}^{t_{134}m_{44}+t_{135}m_{54}}\bar{g_5}^{t_{134}m_{45}+t_{135}m_{55}} \\
= \ &\bar{g_1}^{p_1(m_1,m_3)}\bar{g_2}^{p_2(m_1,m_3)}\bar{g_3}^{p_3(m_1,m_3)} \\
&\bar{g_4}^{p_4(m_1,m_3)+t_{134}m_{44}+t_{135}m_{54}}\bar{g_5}^{p_5(m_1,m_3)+t_{134}m_{45}+t_{135}m_{55}} \\
= \ &\bar{g_1}^{m_{11}}\bar{g_2}^{m_{12}}\bar{g_3}^{m_{13}+m_{33}} \\
&\bar{g_4}^{m_{14}+m_{34}+t_{134}m_{44}+t_{135}m_{54}}\bar{g_5}^{m_{15}+m_{25}+t_{134}m_{45}+t_{135}m_{55}}.
\end{aligned}$$

Zuletzt müssen wir noch folgende Relation untersuchen

$$\varphi(g_2)\varphi(g_1) = \varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(g_3)^{t_{123}}\varphi(g_4)^{t_{124}}\varphi(g_5)^{t_{125}}.$$

Wir beginnen wieder mit der linken Seite der Gleichung

$$\begin{aligned}
\varphi(g_2)\varphi(g_1) &= \bar{g_1}^{m_{21}}\bar{g_2}^{m_{22}}\bar{g_3}^{m_{23}}\bar{g_4}^{m_{24}}\bar{g_5}^{m_{25}}\bar{g_1}^{m_{11}}\bar{g_2}^{m_{12}}\bar{g_3}^{m_{13}}\bar{g_4}^{m_{14}}\bar{g_5}^{m_{15}} \\
&= \bar{g_1}^{p_1(m_2,m_1)}\bar{g_2}^{p_2(m_2,m_1)}\bar{g_3}^{p_3(m_2,m_1)}\bar{g_4}^{p_4(m_2,m_1)}\bar{g_5}^{p_5(m_2,m_1)} \\
&= \bar{g_1}^{m_{21}+m_{11}}\bar{g_2}^{m_{22}+m_{12}}\bar{g_3}^{m_{23}+m_{13}+T_{123}m_{22}m_{11}} \\
&\quad \bar{g_4}^{m_{24}+m_{14}+T_{124}m_{22}m_{11}+T_{134}T_{123}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2+T_{134}m_{23}m_{11}} \\
&\quad \bar{g_4}^{T_{234}T_{123}m_{11}m_{22}(m_{22}-1)/2+T_{234}T_{123}m_{22}m_{11}m_{12}+T_{234}m_{23}m_{12}} \\
&\quad \bar{g_5}^{m_{25}+m_{15}+T_{125}m_{22}m_{11}+T_{135}T_{123}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2+T_{135}m_{23}m_{11}} \\
&\quad \bar{g_5}^{T_{235}T_{123}m_{11}m_{22}(m_{22}-1)/2+T_{235}T_{123}m_{22}m_{11}m_{12}+T_{235}m_{23}m_{12}}.
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir die rechte Seite

$$\begin{aligned}
&\varphi(g_1)\varphi(g_2)\varphi(g_3)^{t_{123}} \\
&\varphi(g_4)^{t_{124}}\varphi(g_5)^{t_{125}} = \bar{g_1}^{m_{11}}\bar{g_2}^{m_{12}}\bar{g_3}^{m_{13}}\bar{g_4}^{m_{14}}\bar{g_5}^{m_{15}}\bar{g_1}^{m_{21}}\bar{g_2}^{m_{22}}\bar{g_3}^{m_{23}}\bar{g_4}^{m_{24}}\bar{g_5}^{m_{25}} \\
&\quad (\bar{g_3}^{m_{33}}\bar{g_4}^{m_{34}}\bar{g_5}^{m_{35}})^{t_{123}}(\bar{g_4}^{m_{44}}\bar{g_5}^{m_{45}})^{t_{124}}(\bar{g_4}^{m_{54}}\bar{g_5}^{m_{55}})^{t_{125}} \\
&= \bar{g_1}^{p_1(m_1,m_2)}\bar{g_2}^{p_2(m_1,m_2)}\bar{g_3}^{p_3(m_1,m_2)}\bar{g_4}^{p_4(m_1,m_2)}\bar{g_5}^{p_5(m_1,m_2)} \\
&\quad \bar{g_3}^{t_{123}m_{33}}\bar{g_4}^{t_{123}m_{34}}\bar{g_5}^{t_{123}m_{35}}\bar{g_4}^{t_{124}m_{44}}\bar{g_5}^{t_{124}m_{45}} \\
&\quad \bar{g_4}^{t_{125}m_{54}}\bar{g_5}^{t_{125}m_{55}} \\
&= \bar{g_1}^{p_1(m_1,m_2)}\bar{g_2}^{p_2(m_1,m_2)}\bar{g_3}^{p_3(m_1,m_2)}\bar{g_4}^{p_4(m_1,m_2)}\bar{g_5}^{p_5(m_1,m_2)} \\
&\quad \bar{g_3}^{t_{123}m_{33}}\bar{g_4}^{t_{123}m_{34}+t_{124}m_{44}+t_{125}m_{54}}\bar{g_5}^{t_{123}m_{35}+t_{124}m_{45}+t_{125}m_{55}} \\
&= \bar{g_1}^{p_1(m_1,m_2)}\bar{g_2}^{p_2(m_1,m_2)}\bar{g_3}^{p_3(m_1,m_2)+t_{123}m_{33}} \\
&\quad \bar{g_4}^{p_4(m_1,m_2)+t_{123}m_{34}+t_{124}m_{44}+t_{125}m_{54}} \\
&\quad \bar{g_5}^{p_5(m_1,m_2)+t_{123}m_{35}+t_{124}m_{45}+t_{125}m_{55}} \\
&= \bar{g_1}^{m_{11}+m_{21}}\bar{g_2}^{m_{12}+m_{22}}\bar{g_3}^{m_{13}+m_{23}+T_{123}m_{12}m_{21}+t_{123}m_{33}} \\
&\quad \bar{g_4}^{m_{14}+m_{24}+T_{124}m_{12}m_{21}+T_{134}T_{123}m_{12}m_{21}(m_{21}-1)/2+T_{134}m_{13}m_{21}} \\
&\quad \bar{g_4}^{T_{234}T_{123}m_{21}m_{12}(m_{12}-1)/2+T_{234}T_{123}m_{12}m_{21}m_{22}+T_{234}m_{13}m_{22}} \\
&\quad \bar{g_4}^{t_{123}m_{34}+t_{124}m_{44}+t_{125}m_{54}} \\
&\quad \bar{g_5}^{m_{15}+m_{25}+T_{125}m_{12}m_{21}+T_{135}T_{123}m_{12}m_{21}(m_{21}-1)/2+T_{135}m_{13}m_{21}} \\
&\quad \bar{g_5}^{T_{235}T_{123}m_{21}m_{12}(m_{12}-1)/2+T_{235}T_{123}m_{12}m_{21}m_{22}+T_{235}m_{13}m_{22}} \\
&\quad \bar{g_5}^{t_{123}m_{35}+t_{124}m_{45}+t_{125}m_{55}}.
\end{aligned}$$

Da die Präsentation von $G(T)$ konsistent ist, ist die Normalform eindeutig. Das heißt, die Exponenten auf den linken Seiten der betrachteten Gleichungen müssen mit denen auf den rechten

Seiten übereinstimmen. Wir erhalten also folgende Zusammenhänge zwischen t und T

$$\begin{array}{lll}
(1_1) & T_{123}m_{22}m_{11} & = T_{123}m_{12}m_{21} + t_{123}m_{33}, \\
(2_1) & T_{134}m_{33}m_{11} + T_{234}m_{33}m_{12} & = t_{134}m_{44} + t_{135}m_{54}, \\
(2_2) & T_{135}m_{33}m_{11} + T_{235}m_{33}m_{12} & = t_{134}m_{45} + t_{135}m_{55}, \\
(2_3) & T_{134}m_{33}m_{21} + T_{234}m_{33}m_{22} & = t_{234}m_{44} + t_{235}m_{54}, \\
(2_4) & T_{135}m_{33}m_{21} + T_{235}m_{33}m_{22} & = t_{234}m_{45} + t_{235}m_{55}, \\
(3_1) & T_{124}m_{22}m_{11} + T_{134}m_{23}m_{11} & \\
 & +T_{134}T_{123}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2 & \\
 & +T_{234}T_{123}m_{11}m_{22}(m_{22}-1)/2 & \\
 & +T_{234}T_{123}m_{22}m_{11}m_{12} + T_{234}m_{23}m_{12} & = T_{124}m_{12}m_{21} + T_{134}m_{13}m_{21} \\
 & & \quad +T_{134}T_{123}m_{12}m_{21}(m_{21}-1)/2 \\
 & & \quad +T_{234}T_{123}m_{21}m_{12}(m_{12}-1)/2 \\
 & & \quad +T_{234}T_{123}m_{12}m_{21}m_{22} + T_{234}m_{13}m_{22} \\
 & & \quad +t_{123}m_{34} + t_{124}m_{44} + t_{125}m_{54}, \\
(3_2) & T_{125}m_{22}m_{11} + T_{135}m_{23}m_{11} & \\
 & +T_{135}T_{123}m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2 & \\
 & +T_{235}T_{123}m_{11}m_{22}(m_{22}-1)/2 & \\
 & +T_{235}T_{123}m_{22}m_{11}m_{12} + T_{235}m_{23}m_{12} & = T_{125}m_{12}m_{21} + T_{135}m_{13}m_{21} \\
 & & \quad +T_{135}T_{123}m_{12}m_{21}(m_{21}-1)/2 \\
 & & \quad +T_{235}T_{123}m_{21}m_{12}(m_{12}-1)/2 \\
 & & \quad +T_{235}T_{123}m_{12}m_{21}m_{22} + T_{235}m_{13}m_{22} \\
 & & \quad +t_{123}m_{35} + t_{124}m_{45} + t_{125}m_{55}.
\end{array}$$

Das Ziel dieser Rechnung ist eine Beschreibung der Elemente aus T in den Elementen aus t. Deshalb werden wir im nächsten Schritt die Elemente aus T isolieren und gegebenenfalls bereits erfasste Elemente aus T durch ihre Darstellung in t ersetzen. Dies führt zu folgenden Gleichungen

$$\begin{array}{lll}
(1_1) & T_{123} & = t_{123}m_{33}(m_{22}m_{11} - m_{12}m_{21}), \\
(2_1) & T_{134}m_{33}m_{11} + T_{234}m_{33}m_{12} & = t_{134}m_{44} + t_{135}m_{54}, \\
(2_2) & T_{135}m_{33}m_{11} + T_{235}m_{33}m_{12} & = t_{134}m_{45} + t_{135}m_{55}, \\
(2_3) & T_{134}m_{33}m_{21} + T_{234}m_{33}m_{22} & = t_{234}m_{44} + t_{235}m_{54}, \\
(2_4) & T_{135}m_{33}m_{21} + T_{235}m_{33}m_{22} & = t_{234}m_{45} + t_{235}m_{55}, \\
(3_1) & t_{124}m_{44} + t_{125}m_{54} & = T_{124}(m_{22}m_{11} - m_{12}m_{21}) + T_{134}(m_{23}m_{11} - m_{13}m_{21}) \\
 & & \quad +T_{234}(m_{23}m_{12} - m_{23}m_{22}) \\
 & & \quad +T_{134}T_{123}(m_{22}m_{11}(m_{11}-1)/2 \\
 & & \quad +m_{12}m_{21}(1-m_{21})/2) \\
 & & \quad +T_{234}T_{123}(m_{11}m_{22}(m_{22}-1)/2 \\
 & & \quad +m_{21}m_{12}(1-m_{12})/2 + m_{22}m_{12}(m_{11}-m_{21})) \\
 & & \quad -T_{123}m_{34}m_{33}(m_{22}m_{11} - m_{12}m_{21}),
\end{array}$$

$$
\begin{aligned}
(3_2) \quad t_{124}m_{45} + t_{125}m_{55} \quad &= \quad T_{125}(m_{22}m_{11} - m_{12}m_{21}) + T_{135}(m_{23}m_{11} - m_{13}m_{21}) \\
&\quad +T_{235}(m_{23}m_{12} - m_{13}m_{22}) \\
&\quad +T_{135}T_{123}(m_{22}m_{11}(m_{11} - 1)/2 \\
&\quad +m_{12}m_{21}(1 - m_{21})/2) \\
&\quad +T_{235}T_{123}(m_{11}m_{22}(m_{22} - 1)/2 \\
&\quad +m_{21}m_{12}(1 - m_{12})/2 + m_{22m_{12}}(m_{11} - m_{21})) \\
&\quad -T_{123}m_{34}m_{33}(m_{22}m_{11} - m_{12}m_{21}).
\end{aligned}
$$

Wenn wir nun die Gleichungen $(2_1), \ldots (2_4)$ beziehungsweise (3_1) und (3_2) genauer untersuchen, stellen wir einen Zusammenhang fest. Deshalb werden wir sie im nächsten Schritt als eine Gleichung betrachten. Des Weiteren definieren wir die Ersetzungen

$$
\begin{aligned}
d &= m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}, \\
e &= m_{11}m_{23} - m_{13}m_{21}, \\
f &= m_{12}m_{23} - m_{13}m_{22}.
\end{aligned}
$$

Dies führt zu folgendem Gleichungssystem

(1) $T_{123} = dm_{33}t_{123}$,

(2) $m_{33}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} T_{134} & T_{135} \\ T_{234} & T_{235} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{134} & t_{135} \\ t_{234} & t_{235} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{44} & m_{45} \\ m_{54} & m_{55} \end{pmatrix}$,

(3) $(t_{124}, t_{125})\begin{pmatrix} m_{44} & m_{45} \\ m_{54} & m_{55} \end{pmatrix} = d(T_{124}, T_{125}) + e(T_{134}, T_{135}) + f(T_{234}, T_{235}) + (l_1, l_2)T_{123}$

mit

$$
\begin{aligned}
l_1 \quad &= \quad -dm_{33}m_{34} + T_{134}(m_{11}m_{22}(m_{11} - 1) + m_{12}m_{21}(1 - m_{21}))/2 \\
&\quad +T_{234}(m_{22}m_{12}(m_{11} - m_{21}) + m_{11}m_{22}(m_{22} - 1)/2 + m_{12}m_{21}(1 - m_{12})/2), \\
l_2 \quad &= \quad -dm_{33}m_{35} + T_{135}(m_{11}m_{22}(m_{11} - 1) + m_{12}m_{21}(1 - m_{21}))/2 \\
&\quad +T_{235}(m_{22}m_{12}(m_{11} - m_{21}) + m_{11}m_{22}(m_{22} - 1)/2 + m_{12}m_{21}(1 - m_{12})/2).
\end{aligned}
$$

Um diese Gleichungen auszuwerten, brauchen wir die Theorie aus dem letzten Abschnitt. Dazu betrachten wir die Gruppe D_k für $k = b/a$ und die Abbildung $^* : D_k \to \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$. Wir rekapitulieren, dass $U, V \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ mit der Eigenschaft $\mathrm{sign}(t_{123}) \det(U)US = LV$ gegeben sind. Sei nun T definiert als $T = \{(A, B) \mid A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ mit $\mathrm{sign}(t_{123}) \det(A)AS = LB\}$. Dann besagt Lemma 6.1.5, dass T sich darstellen lässt durch

$$T = \{(Ug^*, Vg) \mid g \in D_k\}.$$

Wir haben (o_1, o_2) als Bahnenrepräsentanten des Vektors

$$\det(U)(t_{124}, t_{125})V \bmod (\mathrm{ggT}(a, t_{123}), \mathrm{ggT}(b, t_{123}))$$

in $\mathcal{O}(a, b, |t_{123}|)$ unter der Operation von $D_{b/a}$ gewählt. Sei also $h \in D_k$ so gewählt, dass die Gleichung

$$(\det(U)(t_{124}, t_{125})V)h \equiv (o_1, o_2) \bmod (\mathrm{ggT}(a, t_{123}), \mathrm{ggT}(b, t_{123}))$$

erfüllt wird.

Wir definieren $w = \det(h)h$ und betrachten die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} Uw^* & \star & \star \\ 0 & \mathrm{sign}(t_{123}) \det(Uw^*) & \star \\ 0 & 0 & Vw \end{pmatrix}.$$

Da $d, m_{33} \in \{\pm 1\}$ gilt, liefert Gleichung (1), dass $T_{123} \in \{\pm t_{123}\}$ gilt. Für die kanonische Form wollen wir den positiven Wert bekommen. Das wird durch M erreicht. Betrachten wir nun Gleichung (2). Da w in D_k liegt, wird diese Gleichung nach Konstruktion von T von M erfüllt. Bleibt also noch Gleichung (3) zu betrachten. Es gilt $\det(w^*) = \det(w) = \det(h)$ und damit für gewisse $n, m \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned}\det(Uw^*)(t_{124}, t_{125})Vw &= \det(U)\det(w^*)(t_{124}, t_{125})V\det(h)h \\ &= \det(U)(t_{124}, t_{125})Vh \\ &= (o_1, o_2) + (n\mathrm{ggT}(a, t_{123}), m\mathrm{ggT}(b, t_{123})).\end{aligned}$$

Damit gibt uns Gleichung (4) genau dann die gewünschte Form, wenn gilt

$$eT_{134} + l_1T_{123} = ea + \mathrm{sign}(t_{123}l_1t_{123} = dn\mathrm{ggT}(a, t_{123}),$$

$$fT_{135} + l_2T_{123} = fb + \mathrm{sign}(t_{123}l_2t_{123} = dm\mathrm{ggT}(b, t_{123}).$$

Da m_{13}, m_{23}, m_{34} und m_{35} frei wählbare Parameter aus $\mathbb{Z}$ sind, (l_1, l_2) linear von (m_{34}, m_{35}) abhängt und für e, f

$$(e, f) = (m_{23}, -m_{13})\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22}\end{pmatrix},$$

gilt, sind auch e, f, l_1, l_2 frei wählbar aus $\mathbb{Z}$. Die Darstellung der Summe als Vielfaches des ggT folgt nun aus Lemma 2.2.1 und Lemma 2.2.2. Damit haben wir die gesuchte Präsentation für $G(T)$ gefunden und der Beweis ist vollständig. □

Da das Minimum der Bahnen von $L(a, b, |t_{123}|)$ unter der Operation von $D_{b/a}$ eindeutig bestimmt ist, ist das Repräsentantensystem $\mathcal{O}(a, b, |t_{123}|)$ eindeutig bestimmt. Damit impliziert Satz 6.2.1 folgendes Ergebnis.

Korollar 6.2.2
Die kanonische Form $\mathrm{Cf}(t)$ *ist eindeutig bestimmt und* $\mathcal{T}$*-Gruppen vom Typ* $(2, 1, 2)$ *sind genau dann isomorph, wenn ihre kanonische Form übereinstimmt.*

6.3 Die Automorphismengruppe

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Automorphismengruppe einer $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2, 1, 2)$ bezüglich ihrer in Satz 6.2.1 bestimmten kanonischen Form. Hierfür nutzen wir die Erkenntnisse aus Lemma 3.1.1.

Satz 6.3.1
Sei $G(T)$ *eine* $\mathcal{T}$*-Gruppe vom Typ* $(2, 1, 2)$ *in ihrer in Satz 6.2.1 beschriebenen kanonischen Form. Sei* $k = b/a$*. Für* $g \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$*, zwei Vektoren* $x, y \in \mathbb{Z}^2$ *und eine Matrix* $z \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ *definieren wir*

$$M_{g,x,y,z} = \det(g)\left(\begin{array}{c|c|c} g^* & x^T & z \\ \hline 0 & 1 & y \\ \hline 0 & 0 & g \end{array}\right) \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Z}).$$

Diese Matrix $M_{g,x,y,z}$ *korrespondiert genau dann zu einem Automorphismus von* $G(T)$*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind*

- *$g \in Stab_{D_k}((o_1, o_2))$, wobei D_k wie gehabt auf $L(a, b, T_{123})$ operiert. Damit gilt $(o_1, o_2)(g - 1) = \det(g)(ea + l_1T_{123}, fb + l_2T_{123})$ für gewisse $e, f, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$.*
- $x = (e, f)(g^*)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.
- *$y = -(l_1, l_2) + (aw(g), b(u(g) + v(g)))$, wobei $u(g), w(g)$ und $v(g)$ Formeln in den Einträgen der Matrix g sind und folgende Form haben*

$$\begin{aligned} u(g) &= g_{11}g_{22}(g_{22} - 1) + g_{12}g_{21}(1 - g_{12}))/2, \\ w(g) &= g_{11}g_{22}(g_{11} - 1) + g_{12}g_{21}(1 - g_{21}))/2, \\ v(g) &= g_{22}g_{12}(g_{11} - g_{21}). \end{aligned}$$

- *z ist beliebig.*

Beweis:
Als erstes stellen wir fest, dass die Art der Operation von D_k die Existenz von $e, f, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ mit den geforderten Eigenschaften impliziert. Da ein Automorphismus von $G(T)$ natürlich insbesondere ein Isomorphismus $G(T) \to G(T)$ ist, haben wir hier den Spezialfall $t = T$ zu dem Isomorphismus aus dem Beweis von Satz 6.2.1. Das bedeutet, eine Matrix

$$M = \left(\begin{array}{cc|c|cc} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ \hline 0 & 0 & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ \hline 0 & 0 & 0 & m_{44} & m_{45} \\ 0 & 0 & 0 & m_{54} & m_{55} \end{array}\right)$$

mit $m_{ij} \in \mathbb{Z}$, $m_{33} \in \{\pm 1\}$ und invertierbaren Diagonalblöcken

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} m_{44} & m_{45} \\ m_{54} & m_{55} \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$$

liegt in $\mathrm{GL}(5, \mathbb{Z})$. Nach Lemma 3.1.1 korrespondiert M genau dann zu einem Automorphismus von $G(T)$, falls die durch M definierten Bilder die Relationen von $G(T)$ erfüllen. Nach den Rechnungen aus dem Beweis von Satz 6.2.1 ist das äquivalent dazu, dass folgende Gleichungen erfüllt sind

$$\begin{aligned} &(1)\quad T_{123} = dm_{33}T_{123}, \\ &(2)\quad m_{33}\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} m_{44} & m_{45} \\ m_{54} & m_{55} \end{pmatrix}, \\ &(3)\quad (o_1, o_2)\begin{pmatrix} m_{44} & m_{45} \\ m_{54} & m_{55} \end{pmatrix} = d(o_1, o_2) + e(a, 0) + f(0, b) + (l_1, l_2)T_{123} \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} d &= m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}, \\ e &= m_{11}m_{23} - m_{13}m_{21}, \\ f &= m_{12}m_{23} - m_{13}m_{22} \end{aligned}$$

und

$$l_1 = -dm_{33}m_{34} + a(m_{11}m_{22}(m_{11} - 1) + m_{12}m_{21}(1 - m_{21}))/2,$$

$$l_2 = -dm_{33}m_{35} + b(m_{22}m_{12}(m_{11} - m_{21}) + m_{11}m_{22}(m_{22} - 1)/2 + m_{12}m_{21}(1 - m_{12})/2).$$

Gleichung (1) impliziert $m_{33} = d$. Gleichung (2) hat die Form

$$\det(A)AS = BS.$$

Damit wird die Lösungsmenge dieser Gleichung beschrieben durch

$$T = \{(A, B) \mid A, B \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}) \text{ mit } \det(A)AS = SB\}.$$

Eine spezielle Lösung ist (I_2, I_2), wobei $I_2 \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ die Einheitsmatrix ist. Nach Lemma 6.1.5 wird T vollständig beschrieben durch

$$T = \{(I_2h^*, I_2h) \mid h \in D_k\} = \{(h^*, h) \mid h \in D_k\}.$$

Deswegen sind die Diagonalblöcke von M von der Form $h^*, \det(h)$ und h für ein $h \in D_k$. Für Gleichung (3) hat dieses Ergebnis folgende Auswirkungen

$$(o_1, o_2)h = \det(h)(o_1, o_2) + e(a, 0) + f(0, b) + (l_1, l_2)T_{123}.$$

Dies lässt sich umformen zu

$$(o_1, o_2)(\det(h)h - 1) = \det(h)(ea + l_1T_{123}, fb + l_2T_{123}).$$

Diese Gleichung kann genau dann erfüllt werden, wenn $\det(h)h \in \mathrm{Stab}_{D_k}((o_1, o_2))$ gilt. Wir setzen $g = det(h)h$. In diesem Fall ist Gleichung (3) genau dann erfüllt, wenn

$$(e, f) = (m_{23}, -m_{13})g^*$$

und

$$\begin{aligned} l_1 &= -m_{34} + aw(g), \\ l_2 &= -m_{35} + b(v(g) + u(g)). \end{aligned}$$

gelten. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} x = (m_{13}, m_{23}) &= (e, f)(g^*)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \\ y = (m_{34}, m_{35}) &= -(l_1, l_2) + (aw(g), b(v(g) + u(g)) \end{aligned}$$

und M hat die im Satz beschriebene Form. □

6.4 Beispiele

In diesem Abschnitt wollen wir die theoretischen Erkenntnisse aus den letzten beiden Abschnitten auf einige konkrete Gruppen anwenden.

Beispiel 6.4.1
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2,1,2)$ und es gelte $G \cong G(t)$ mit $t = (-3,-12,21,3,-9,-3,-6)$. Dann hat G eine $\mathcal{T}$-Präsentation in Erzeugern $g_1,\dots,g_5$, so dass $\langle g_4, g_5\rangle$ eine zentrale Untergruppe in G ist und die nicht-trivialen Relationen folgende Form haben

$$\begin{aligned} g_2g_1 &= g_1g_2g_3^{-3}g_4^{-12}g_5^{21}, \\ g_3g_1 &= g_1g_3g_4^{3}g_5^{-9}, \\ g_3g_2 &= g_2g_3g_4^{-3}g_5^{-6}. \end{aligned}$$

Nun wollen wir T so bestimmen, dass $G(T)$ die in Satz 6.2.1 beschriebene kanonische Form für diesen Isomorphietyp hat. Dazu betrachten wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 3 & -9 \\ -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Als erstes berechnen wir die Smith-Normalform S von L und die dazugehörigen Transformationsmatrizen A und B mit $AS = LB$. Wir erhalten folgende Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 15 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich die Werte $a = 3$ und $b = 15$. Für die kanonische Form benötigen wir Matrizen $U, V \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$ mit $\mathrm{sign}(t_{123})\det(U)US = LV$. Es gilt $\mathrm{sign}(t_{123}) = \mathrm{sign}(-3) = -1 = \det(A)$ und damit erfüllen $U = A$ und $V = B$ die Bedingungen aus Satz 6.2.1. Im nächsten Schritt berechnen wir den Vektor

$$\det(U)(t_{124}, t_{125})V \bmod (\mathrm{ggT}(a, t_{123}), \mathrm{ggT}(b, t_{123})).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \det(U)(t_{124}, t_{125})V \bmod (\mathrm{ggT}(a, t_{123}), \mathrm{ggT}(b, t_{123})) \\ = \; & \det\left(\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\right)(-12,21)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod (\mathrm{ggT}(3,-3), \mathrm{ggT}(15,-3)) \\ = \; & -(-12,21)\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bmod (3,3) \\ = \; & (-12,45) \bmod (3,3) \\ = \; & (0,0). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Bahn von $(0,0)$ unter der Operation von $D_{b/a} = D_5$. Es gilt

$$\mathrm{Bahn}_{D_5}((0,0)) = \{(0,0)\}.$$

Als Repräsentanten (o_1, o_2) wählen wir das (minimale) Element $(0,0)$. Dies führt zu folgendem Ergebnis für T

$$\begin{aligned} T_{123} &= |-3| &&= 3, \\ T_{134} &= a &&= 3, \\ T_{135} &= 0, \\ T_{234} &= 0, \\ T_{235} &= b &&= 15, \\ T_{124} &= o_1 &&= 0, \\ T_{125} &= o_2 &&= 0. \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathrm{Cf}(t) = (3, 0, 0, 3, 0, 0, 15)$ und G besitzt eine $\mathcal{T}$-Präsentation, deren nicht-triviale Relationen beschrieben sind durch

$$\begin{aligned} g_2g_1 &= g_1g_2g_3^3, \\ g_3g_1 &= g_1g_3g_4^3, \\ g_3g_2 &= g_2g_3g_5^{15}. \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Automorphismengruppe von $G(T)$. Um die in Satz 6.3.1 beschriebene Form von M zu erhalten, müssen wir zuerst den Stabilisator S von $(0, 0)$ unter der Operation von $D_{b/a} = D_5$ berechnen.

$$\begin{aligned} S = \mathrm{Stab}_{D_5}((0,0)) \quad = \quad & \Bigg\langle \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \Bigg\rangle. \end{aligned}$$

Sei $g \in S$ und seien $e, f, l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$ so gewählt, dass $(0, 0)(g - 1) = \det(g)(3e + 3l_1, 15f + 3l_2)$ gilt. Seien weiter $x = (e, f)(g^*)^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $y = -(l_1, l_2) + (3w(g), 15(u(g) + v(g)))$, wobei $u(g), w(g)$ und $v(g)$ Formeln in den Einträgen der Matrix g sind und folgende Form haben

$$\begin{aligned} u(g) &= g_{11}g_{22}(g_{22} - 1) + g_{12}g_{21}(1 - g_{12}))/2, \\ w(g) &= g_{11}g_{22}(g_{11} - 1) + g_{12}g_{21}(1 - g_{21}))/2, \\ v(g) &= g_{22}g_{12}(g_{11} - g_{21}). \end{aligned}$$

Dann korrespondiert ein Automorphismus von $G(T)$ zur Matrix

$$M_{g,x,y,z} = \det(g) \left(\begin{array}{c|c|c} g^* & x^T & \star \\ \hline 0 & 1 & y \\ \hline 0 & 0 & g \end{array} \right) \in \mathrm{GL}(5, \mathbb{Z}),$$

wobei $\star$ für ein beliebiges Element aus $\mathbb{Z}$ steht.

Betrachten wir nun eine Gruppe, bei der die Matrizen U und V nicht mit den Matrizen A und B übereinstimmen.

Beispiel 6.4.2

Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(2, 1, 2)$ und es gelte $G \cong G(t)$ mit $t = (3, 5, -7, 12, 8, 9, -3)$. Dann hat G eine $\mathcal{T}$-Präsentation in Erzeugern $g_1, \ldots, g_5$, so dass $\langle g_4, g_5 \rangle$ eine zentrale Untergruppe in G ist und die nicht-trivialen Relationen folgende Form haben

$$\begin{aligned} g_2g_1 &= g_1g_2g_3^3g_4^5g_5^{-7}, \\ g_3g_1 &= g_1g_3g_4^{12}g_5^8, \\ g_3g_2 &= g_2g_3g_4^9g_5^{-3}. \end{aligned}$$

Nun wollen wir T so bestimmen, dass $G(T)$ die in Satz 6.2.1 beschriebene kanonische Form für diesen Isomorphietyp hat. Dazu betrachten wir die Matrix

$$L = \begin{pmatrix} 12 & 8 \\ 9 & -3 \end{pmatrix}.$$

Als erstes berechnen wir die Smith-Normalform S von L und die dazugehörigen Transformationsmatrizen A und B mit $AS = LB$. Wir erhalten folgende Matrizen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 108 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 28 & -9 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } B = \begin{pmatrix} 1 & -35 \\ 2 & -69 \end{pmatrix}.$$

Damit ergeben sich die Werte $a = 1$ und $b = 108$. Für die kanonische Form benötigen wir Matrizen $U, V \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ mit $\mathrm{sign}(t_{123}) \det(U)US = LV$. Dazu definieren wir

$$h = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann besagt Lemma 6.1.4, dass wir die geforderten Matrizen $U, V \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z})$ durch die passende Wahl von $U \in \{A, Ah\}$ bekommen. Wir wählen U so, dass $\det(U) = \mathrm{sign}(t_{123})$ erfüllt ist, und V dann dazu entsprechend aus $\{B, Bh\}$. Es gilt $\mathrm{sign}(t_{123}) = \mathrm{sign}(3) = 1$. Nun berechnen wir $\det(A) = -1$ und $\det(Ah) = 1$. Damit erfüllen

$$U = Ah = \begin{pmatrix} -28 & -9 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } V = Bh = \begin{pmatrix} -1 & -35 \\ -2 & -69 \end{pmatrix}$$

die Bedingungen aus Satz 6.2.1. Im nächsten Schritt berechnen wir den Vektor

$$\det(U)(t_{124}, t_{125})V \bmod (\mathrm{ggT}(a, t_{123}), \mathrm{ggT}(b, t_{123})).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \det(U)(t_{124}, t_{125})V \bmod (\mathrm{ggT}(a, t_{123}), \mathrm{ggT}(b, t_{123})) \\ = \; & \det\left(\begin{pmatrix} -28 & -9 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}\right)(5, -7)\begin{pmatrix} -1 & -35 \\ -2 & -69 \end{pmatrix} \bmod (\mathrm{ggT}(1,3), \mathrm{ggT}(108,3)) \\ = \; & (5, -7)\begin{pmatrix} -1 & -35 \\ -2 & -69 \end{pmatrix} \bmod (1,3) \\ = \; & (9, 308) \bmod (1,3) \\ = \; & (0, 2). \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die Bahn von $(0,2)$ unter der Operation von $D_{b/a} = D_{108}$. Es gilt

$$\mathrm{Bahn}_{D_{108}}((0,2)) = \{(0,2), (0,1)\}.$$

Als Repräsentanten (o_1, o_2) wählen wir das minimale Element $(0,1)$. Dies führt zu folgendem Ergebnis von T

$$\begin{aligned} T_{123} &= |3| = 3, \\ T_{134} &= a = 1, \\ T_{135} &= 0, \\ T_{234} &= 0, \\ T_{235} &= b = 108, \\ T_{124} &= o_1 = 0, \\ T_{125} &= o_2 = 1. \end{aligned}$$

Damit gilt $\mathrm{Cf}(t) = (3, 0, 1, 1, 0, 0, 108)$ und G besitzt eine $\mathcal{T}$-Präsentation, deren nicht-triviale Relationen beschrieben sind durch

$$\begin{aligned} g_2 g_1 &= g_1 g_2 g_3^3 g_5, \\ g_3 g_1 &= g_1 g_3 g_4, \\ g_3 g_2 &= g_2 g_3 g_5^{108}. \end{aligned}$$

Ein Vorteil der kanonischen Form ist die Lösung des Isomorphieproblems. Dazu betrachten wir noch ein kurzes Beispiel.

Beispiel 6.4.3
Seien die $\mathcal{T}$-Gruppen G_1, G_2 und G_3 vom Typ $(2,1,2)$ gegeben. Es gelte $G_1 \cong G(t_1), G_2 \cong G(t_2)$ und $G_3 \cong G(t_3)$ mit

$$\begin{aligned} t_1 &= (-3,-12,21,3,-9,-3,-6), \\ t_2 &= (3,-11,17,6,-9,9,-6), \\ t_3 &= (3,-9,-15,9,-3,12,-9). \end{aligned}$$

Wenn wir analog zu den beiden Beispielen zuvor mit dem Verfahren aus Satz 6.2.1 die kanonische Form bestimmen, erhalten wir

$$\begin{aligned} \mathrm{Cf}(t_1) &= (3,0,0,3,0,0,15), \\ \mathrm{Cf}(t_2) &= (3,0,1,3,0,0,15), \\ \mathrm{Cf}(t_3) &= (3,0,0,3,0,0,15). \end{aligned}$$

Damit sind nach Korollar 6.2.2 G_1 und G_3 isomorph zueinander und G_2 ist nicht isomorph zu den anderen.

Kapitel

7

Klassifikation gewisser $\mathcal{T}$-Gruppen der Klasse 2

In diesem Kapitel betrachten wir diejenigen $\mathcal{T}$-Gruppen der Nilpotenzklasse 2, die eine Hirschlänge von höchstens 5 haben. Diese Gruppen sind bereits in [10] bis auf Isomorphie klassifiziert worden. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir diese Klassifikation und die daraus resultierende kanonische Form hier kurz und geben dann eine Beschreibung der Automorphismengruppe.

7.1 Die $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (3,2)

7.1.1 Die kanonische Form

Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(3,2)$. Dann hat G Hirschlänge 5, Nilpotenzklasse 2 und folgende Isolatorreihe

$$G = I_1(G) > I_2(G) > I_3(G) = \{1\},$$

wobei $I_1(G)/I_2(G)$ die frei abelsche Gruppe vom Rang 3 und $I_2(G)/I_3(G)$ die frei abelsche Gruppe vom Rang 2 ist. Sei $(g_1, \ldots, g_5)$ eine $\mathcal{T}$-Sequenz von G, die die Isolatorreihe verfeinert. Dann hat G eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation in $g_1, \ldots, g_5$, deren nicht-triviale Relationen für $t_{ijk} \in \mathbb{Z}$ folgende Form haben

$$(\star) \qquad \begin{aligned} g_2 g_1 &= g_1 g_2 g_4^{t_{124}} g_5^{t_{125}}, \\ g_3 g_1 &= g_1 g_3 g_4^{t_{134}} g_5^{t_{135}}, \\ g_3 g_2 &= g_2 g_3 g_4^{t_{234}} g_5^{t_{235}}. \end{aligned}$$

Satz 3.3.2 zu Folge ist die Präsentation $(\star)$ konsistent. Nach Satz 2.3.5 ist G damit isomorph zu einer $\mathcal{T}$-Gruppe $G(t)$ mit

$$t = (t_{124}, t_{125}, t_{134}, t_{135}, t_{234}, t_{235}) \in \mathbb{Z}^6.$$

Definiere

$$B(t) = \begin{pmatrix} t_{124} & t_{125} \\ t_{134} & t_{135} \\ t_{234} & t_{235} \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{3\times 2}.$$

Aus dem Typ $(3,2)$ folgt, dass $B(t)$ eine Matrix vom Rang 2 ist. Nun kann eine kanonische Form für G wie folgt bestimmt werden. Vergleiche [10].

Satz 7.1.1
Sei $G(t)$ eine Gruppe vom Typ $(3,2)$ und seien (x,y) die Elementarteiler von $B(t)$. Schreibe $T_{124} = x$, $T_{135} = y$ und $T_{125} = T_{134} = T_{234} = T_{235} = 0$. Dann ist $G(t)$ isomorph zu $G(T)$. Es gilt $\mathrm{Cf}(t) = T$ und $G(T)$ ist eine kanonische Form für den Isomorphietyp von $G(t)$.

Beweis:
Sei $T = (T_{124}, T_{125}, T_{134}, T_{135}, T_{234}, T_{235}) \in \mathbb{Z}^6$. Seien $B(t)$ und $B(T)$ wie zuvor die zu $G(t)$ und $G(T)$ gehörenden Matrizen und sei M die nach Lemma 3.1.1 zu einem Isomorphismus von $G(t)$ nach $G(T)$ korrespondierende Matrix. Dann hat M eine obere Blockdiagonalform mit 2 Diagonalblöcken $X \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$ und $Y \in \mathrm{GL}(2,\mathbb{Z})$. Sei $X \wedge X$ das äußere Quadrat von X. Man bedenke, dass $\mathrm{GL}(3,\mathbb{Z}) \wedge \mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$ eine Untergruppe von $\mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$ vom Index 2 ist und dass

$$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \notin \mathrm{GL}(3,\mathbb{Z}) \wedge \mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$$

gilt. Damit ist Z ein Vertreter der von $\mathrm{GL}(3,\mathbb{Z}) \wedge \mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$ verschiedenen Restklasse. Wenn wir für die Bilder der Erzeuger unter dem Isomorphismus die Relationen von $G(t)$ auswerten, stellen wir fest, dass M genau dann zu einem Isomorphismus korrespondiert, wenn $(X \wedge X)B(t)Y^{-1} = B(T)$ gilt. Damit kann ein Element $W \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$ geschrieben werden als $W = Z^e(X \wedge X)$ mit $X \in \mathrm{GL}(3,\mathbb{Z})$ und $e \in \{0,1\}$. Nun folgt aus dem Satz über die Smith-Normalform, dass $G(t)$ isomorph zu $G(T)$ ist und dass $G(T)$ eine kanonische Form für den Isomorphietyp von $G(t)$ ist. □

7.1.2 Die Automorphismengruppe

In diesem Abschnitt beschreiben wir die Automorphismengruppe einer $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(3,2)$ bezüglich ihrer in Satz 7.1.1 bestimmten kanonischen Form. Hierfür nutzen wir die Erkenntnisse aus Lemma 3.1.1.

Satz 7.1.2
Sei $G(T)$ eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(3,2)$ in ihrer in Satz 7.1.1 beschriebenen kanonischen Form und seien $x = T_{124}$ und $y = T_{135}$. Nach Konstruktion gilt $x, y \in \mathbb{N}$ mit $x \mid y$. Wir schreiben $z = y/x$. Dann sind die Automorphismen von $G(T)$ beschrieben durch Blockdiagonalmatrizen der Form

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} & m_{15} \\ 0 & m_{22} & m_{23} & m_{24} & m_{25} \\ 0 & m_{32} & m_{33} & m_{34} & m_{35} \\ \hline 0 & 0 & 0 & m_{22} & z m_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{z} m_{32} & m_{33} \end{array}\right) \in \mathrm{GL}(5,\mathbb{Z})$$

mit $z|m_{32}$.

Beweis:
Die Gleichung $(X \wedge X)B(T) = B(T)Y$ ergibt folgende Zusammenhänge

$$\begin{aligned} y_{11} &= m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}, \\ y_{12} &= (m_{11}m_{23} - m_{13}m_{21})z, \\ y_{21} &= (m_{11}m_{32} - m_{12}m_{31})/z, \\ y_{22} &= m_{11}m_{33} - m_{13}m_{31}, \\ 0 &= m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}, \\ 0 &= m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die Einträge von $X \wedge X$ mit x_{ij}. Dann ergeben die letzten beiden Gleichungen $x_{31} = x_{32} = 0$. Da $X \wedge X \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{Z})$ gilt, folgt $x_{33} \neq 0$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} 0 &= -m_{33}(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}) + m_{32}(m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31}) = m_{31}x_{33}, \\ 0 &= m_{23}(m_{21}m_{32} - m_{22}m_{31}) - m_{22}(m_{21}m_{33} - m_{23}m_{31}) = -m_{21}x_{33}. \end{aligned}$$

Dass $x_{33} \neq 0$ gilt, liefert $m_{21} = m_{31} = 0$. Damit reduzieren sich die anfänglichen Gleichungen zu

$$\begin{aligned} y_{11} &= m_{11}m_{22}, & y_{12} &= m_{11}m_{23}z, \\ y_{21} &= m_{11}m_{32}/z, & y_{22} &= m_{11}m_{33} \end{aligned}$$

und wir bekommen das gewünschte Ergebnis. □

7.2 Die $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (n, 1)

Die Gruppen vom Typ $(n, 1)$ sind bereits in [10] klassifiziert worden. Der Vollständigkeit halber wiederholen wir diese Klassifikation und die daraus resultierende kanonische Form hier kurz und geben dann eine Beschreibung der Automorphismengruppe.

7.2.1 Die kanonische Form

Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(n, 1)$. Dann hat G Hirschlänge $n+1$, Nilpotenzklasse 2 und eine zyklische nicht-triviale Kommutatoruntergruppe. Damit hat G folgende Isolatorreihe

$$G = I_1(G) > I_2(G) > I_3(G) = \{1\},$$

wobei $I_1(G)/I_2(G)$ die frei abelsche Gruppe vom Rang n ist und $I_2(G) \cong \mathbb{Z}$ gilt. Sei $(g_1, \ldots, g_{n+1})$ eine $\mathcal{T}$-Sequenz für G. Dann haben die nicht-trivialen Relationen von G folgende Form

$$[g_j, g_i] = g_{n+1}^{e_{ij}}$$

für $1 \leq i, j \leq n$ und gewisse $e_{ij} \in \mathbb{Z}$. Sei $E = (e_{ij}) \in \mathbb{Z}^{n \times n}$. Dann ist E antisymmetrisch. Lineare Algebra liefert die Existenz und Eindeutigkeit von Elementen $e_1, \ldots, e_s \in \mathbb{N}$ mit $e_i \mid e_{i+1}$ für $1 \leq i < s$ und eine Matrix $X \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z})$ so dass $X^T E X$ eine Blockdiagonalmatrix mit

Diagonalblöcken $E_1,\dots,E_s$ und N_r. Es gilt $n+1 = 2s+r$. Des Weiteren ist N_r die $r\times r$ Null-Matrix und für $1\le i\le s$ ist E_i von der Form

$$E_i = \begin{pmatrix} 0 & e_i \\ -e_i & 0 \end{pmatrix},$$

siehe auch [15].

Definition 7.2.1
*Wir nennen $(e_1,\dots,e_s)$ die **primären Invarianten** der Gruppe G, s den anitsymmetrischen Rang (AS-Rang) von G und die Matrix $E' = \mathrm{Diag}(E_1,\dots,E_s,N_r)$ die antisymmetrische Normalform (ASN) von G.*

Die folgende Klassifikation für die Gruppen des Typs $(n,1)$ wurde in [10] gezeigt.

Satz 7.2.2
Sei G eine T-Gruppe vom Typ $(n,1)$ mit primären Invarianten $(e_1,\dots,e_s)$. Dann hat G eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation in Erzeugern $g_1,\dots,g_n,g_{n+1}$, deren nicht-triviale Relationen folgende Form haben

$$g_j g_{j-1} = g_{j-1} g_j g_{n+1}^{e_r} \quad \textit{für} \quad 2\le j\le n \quad \textit{mit} \quad j\in\{2r \mid 1\le r\le s\}.$$

Diese Präsentation ist eine kanonische Form für den Isomorphietyp von G.

Bemerkung 7.2.3
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe der Nilpotenzklasse 2 und der Hirschlänge höchstens 5, die nicht vom Typ $(3,2)$ ist. Dann gilt eine der folgenden Aussagen.

(a) *G ist vom Typ $(2,1)$. Dann gelten $G\cong G(t)$ für $t=(t_{123})\in\mathbb{Z}$ und $s=1$. Sei (e_1) die primäre Invariante von G. Dann gilt $\mathrm{Cf}(t)=(e_1)$.*

(b) *G ist vom Typ $(3,1)$. Dann gelten $G\cong G(t)$ für $t=(t_{124},t_{134},t_{234})\in\mathbb{Z}^3$ und $s=1$. Sei (e_1) die primäre Invariante von G. Dann gilt $\mathrm{Cf}(t)=(e_1,0,0)$.*

(c) *G ist vom Typ $(4,1)$. Dann gelten $G\cong G(t)$ für $t=(t_{125},t_{135},t_{145},t_{235},t_{245},t_{345})\in\mathbb{Z}^6$ und $s\le 2$. Für $s=2$ seien (e_1,e_2) die primären Invarianten von G. Für $s=1$ sei (e_1) die primäre Invariante und wir definieren $e_2=0$. Dann gilt $\mathrm{Cf}(t)=(e_1,0,0,0,0,e_2)$.*

7.2.2 Die Automorphismengruppe

Sei G eine T-Gruppe vom Typ $(n,1)$ in kanonischer Form mit ASN E' und $AS\text{-}Rang(G)=s$. Dann ist $G/I_2(G)$ eine frei abelsche Gruppe vom Rang n und man kann $Aut(G/I_2(G))$ mit $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ identifizieren. Analog kann man $\mathrm{Aut}(I_2(G))$ mit $\mathrm{GL}_1(\mathbb{Z})=\{-1,1\}$ identifizieren. Das heißt, der natürliche Homomorphismus

$$\nu : \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{Aut}(G/I_2(G))\times\mathrm{Aut}(I_2(G)) : \alpha\mapsto(\alpha_{G/I_2(G)},\alpha_{I_2(G)})$$

entspricht

$$\nu : \mathrm{Aut}(G) \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})\times\{\pm1\}.$$

Sei E' die ASN von G. Dann definieren wir $M(E') := \{X\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) \mid E' = XE'X^T\}$ und

$$\phi_i : G\longrightarrow G : g_1^{x_1}\cdots g_n^{x_n} g_{n+1}^{y} \mapsto g_1^{x_1}\dots g_n^{x_n} g_{n+1}^{x_i+y}.$$

Lemma 7.2.4
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(n,1)$ und sei E' die ASN von G. Dann gilt

(a) $\mathrm{Kern}(\nu)$ *ist frei abelsch und hat $\{\phi_1,\dots,\phi_n\}$ als ein freies Erzeugendensystem.*

(b) $\mathrm{Bild}(\nu) = \{(X,y) \mid XE'X^T = yE'\}$.

(c) $\{(X,1) \mid X \in M(E')\}$ *ist eine Untergruppe von* $\mathrm{Bild}(\nu)$ *vom Index* 2. *Sei* $Y = \mathrm{Diag}(1,-1,1,-1\dots)$. *Dann gilt* $YE'Y^T = -E'$. *Das heißt* $(Y,-1) \in \mathrm{Bild}(\nu)$.

Beweis:

(a) Sei $\alpha \in \mathrm{Kern}(\nu)$. Dann gilt $\alpha(g_i) = g_i g_{n+1}^{s_i}$ für $1 \le i \le n$ und $\alpha(g_{n+1}) = g_{n+1}$. Daraus folgt, dass $\alpha = \prod_{i=1}^n \alpha_i^{s_i}$ und $\alpha \in \langle \alpha_1,\dots,\alpha_n\rangle$ gilt. Damit erhalten wir, dass $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ den Kern von ν erzeugt und dass $\mathrm{Kern}(\nu)$ frei abelsch vom Rang n ist.

(b) Sei $\alpha \in \mathrm{Aut}(G)$ mit $\alpha(g_i) = g_1^{x_{i1}} \cdots g_n^{x_{in}} g_{n+1}^{z_i} = g_i'$ für $x_{ij}, z_i \in \mathbb{Z}$, $1 \le i,j \le n$ und $\alpha(g_{n+1}) = g_{n+1}^y = g_{n+1}'$ für $y \in \{\pm 1\}$. Da die ASN $E' = (e_{ij}')$ invariant unter α ist, gilt

$$\begin{aligned} g_{n+1}^{ye_{ij}'} &= (g_{n+1})'^{e_{ij}'} = [g_j', g_i'] &&= [\textstyle\prod_{k=1}^n g_k^{x_{jk}}, \prod_{l=1}^n g_l^{x_{il}}] \\ &= \textstyle\prod_{k,l=1}^n [g_k, g_l]^{x_{jk}x_{il}} &&= \textstyle\prod_{k,l=1}^n g_{n+1}^{e_{lk}' x_{jk} x_{il}} = g_{n+1}^{\sum_{k,l=1}^n e_{lk}' x_{jk} x_{il}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $ye_{ij}' = \sum_{k,l=1}^n e_{lk}' x_{il} x_{jk}$. Damit gilt $yE' = XE'X^T$ und wir haben gezeigt, dass das Bild von ν durch $\{(X,y) \mid XE'X^T = yE'\}$ beschrieben wird.

(c) Eine explizite Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} & \mathrm{Diag}(1,-1,1,-1\dots) \cdot \mathrm{Diag}(E_1,\dots,E_s,N_r) \cdot \mathrm{Diag}(1,-1,1,-1\dots) \\ = \; & \mathrm{Diag}(-E_1,\dots,-E_s,-N_r). \end{aligned}$$

□

Das bedeutet, dass die Automorphismengruppe von G durch die ϕ_i und durch $M(E')$ beschrieben werden kann. Es bleibt also, $M(E')$ zu konstruieren. Es gilt $E' = \mathrm{Diag}(E_1,\dots,E_s,0,\dots,0)$. Sei $A := \mathrm{Diag}(E_1,\dots,E_s)$. Wir erhalten folgenden Zusammenhang.

Lemma 7.2.5
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(n,1)$ mit ASN E' und sei $A := \mathrm{Diag}(E_1,\dots,E_s)$. Sei $X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ mit $X = \begin{pmatrix} Z & V \\ Y & W \end{pmatrix}$ für $Z \in \mathbb{Z}^{2s\times 2s}, W \in \mathbb{Z}^{n-2s\times n-2s}, V \in \mathbb{Z}^{2s\times n-2s}, Y \in \mathbb{Z}^{n-2s\times 2s}$. Dann gilt $X \in M(E')$ genau dann, wenn $Z \in M(A)$ und $Y = 0$ gilt.

Beweis:
Wir berechnen

$$XE'X^T = \begin{pmatrix} Z & V \\ Y & W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z^T & Y^T \\ V^T & W^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ZAZ^T & ZAY^T \\ YAZ^T & YAY^T \end{pmatrix}.$$

Damit gilt $X \in M(E')$ genau dann, wenn $ZAZ^T = A$, $ZAY^T = 0$ und $YAY^T = 0$ gelten. Sei nun $X \in M(E')$. Dann gilt $ZAZ^T = A$. Aus $rg(A) = 2s$ folgt $rg(Z) = 2s$ und damit $Z \in M(A)$. Da Z und A invertierbar sind, liefert die Gleichung $ZAY^T = 0$, dass $Y = 0$ gilt. Die Gegenrichtung folgt mit ähnlichen Argumenten. □

Da X in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ liegt, liefert $Y = 0$ den Zusammenhang $\det(X) = \det(Z)\det(W)$. Damit gilt $W \in \mathrm{GL}_{n-2s}(\mathbb{Z})$.

Auf diese Weise hat man die Berechnung von $M(E')$ auf die Berechnung von $M(A)$ reduziert. In Spezialfällen kann man nun Erzeuger für die Automorphismengruppe von G angeben. In Kapitel 8 ist der folgende Fall von Interesse.

Bemerkung 7.2.6

Sei G eine T-Gruppe vom Typ $(n,1)$ in kanonischer Form mit nur einer primären Invarianten, das heißt $s=1$. Die Automorphismengruppe von G besteht aus 2-Tupeln der Form (τ, y) mit

$$\tau \in \left\{ \left(\begin{array}{cc} Z & V \\ 0 & W \end{array} \right) \middle| \, Z \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}), W \in \mathrm{GL}_{n-2}(\mathbb{Z}), V \in \mathbb{Z}^{2\times n-2} \right\} \text{ und } y = \det(Z)$$

und dem Erzeugnis von $\phi_1, \ldots, \phi_n \in \mathrm{Aut}(G)$ mit $\phi_i(g_i) = g_i g_{n+1}$ beziehungsweise $\phi_i(g_j) = g_j$ für $1 \leq i,j \leq n$ und $i \neq j$.

Kapitel 8

Die $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (n,1,1)

In diesem Kapitel betrachten wir die $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ $(n, 1, 1)$ für $n \geq 4$ genauer. Für diese entwickeln wir zwar keine kanonische Form, aber wir untersuchen ihre Struktur und beschreiben einen Ansatz zur „Reduktion" ihrer $\mathcal{T}$-Präsentationen. Wichtige Hilfsmittel hierbei sind die Konzepte der Erweiterung einer abelschen Gruppe mit einer Gruppe und der zweiten Kohomologiegruppe. Generelle Informationen zur Berechnung solcher Erweiterungen findet man in [13, Sec. 2.7, Sec. 8.7] und [3, Sec. 6.2]. Die Ergebnisse in [13, Sec. 8.7] für endliche Gruppen lassen sich auf unendliche Gruppen übertragen.

8.1 Die induzierte Präsentation

Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(n, 1, 1)$. Dann ist G eine $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge $n + 2$ und der Nilpotenzklasse 3 mit der Isolatorreihe

$$G = I_1(G) > I_2(G) > I_3(G) > \{1\},$$

wobei $I_1(G)/I_2(G)$ frei abelsch vom Rang n ist und $I_2(G)/I_3(G)$ sowie $I_3(G)$ zyklisch sind. Damit ist G eine zentrale Erweiterung der Form

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow \bar{G} \longrightarrow 1,$$

wobei $\mathrm{Bild}(\varphi) = I_3(G)$ gilt und $\bar{G}$ eine Gruppe vom Typ $(n, 1)$ ist. Sei $\bar{G}$ in der in 7.2.2 beschriebenen kanonischen Form mit primären Invarianten $(e_1, \ldots, e_s) \in \mathbb{N}^s$ gegeben.
Seien $g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}$ die Urbilder einer $\mathcal{T}$-Sequenz von $\bar{G}$ in G und sei g_{n+2} ein Erzeuger von $I_3(G)$. Dann existierte ein Vektor

$$\alpha = (\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n) \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}},$$

so dass G eine $\mathcal{T}$-Präsentation in $g_1, \ldots, g_n, g_{n+1}, g_{n+2}$ hat, deren nicht-triviale Relationen folgende Form haben

$$\begin{array}{llcll} (R1) & [g_j, g_{j-1}] & = & g_{n+1}^{e_r} g_{n+2}^{\alpha_{j-1,j}} & \text{für} \quad 1 \leq j \leq n+1 \text{ mit } j \in \{2r \mid 1 \leq r \leq s\}, \\ (R2) & [g_j, g_i] & = & g_{n+2}^{\alpha_{i,j}} & \text{für} \quad 1 \leq i < j \leq n+1 \text{ sonst,} \end{array}$$

siehe auch [13, Sec. 8.7] oder [3, Sec. 6.2]. Eine solche Präsentation von G nennen wir eine (von $\bar{G}$) **induzierte $\mathcal{T}$-Präsentation** und bezeichnen sie mit $P(\alpha)$.

Lemma 8.1.1
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(n,1,1)$. Dann impliziert der Typ von G, dass g_{n+1} nicht zentral in G ist. Damit existiert ein $i \in \{1,\dots,n\}$ mit der Eigenschaft $\alpha_{i,n+1} \neq 0$.

Beweis:
Nach Konstruktion ist g_{n+2} zentral in G. Offenbar ist g_{n+1} genau dann zentral in G, wenn alle $\alpha_{i,n+1}$ den Wert Null haben. Nehmen wir an g_{n+2} und g_{n+1} sind beide zentral in G. Dann ist die Kommutatoruntergruppe $\gamma_2(G)$ zentral in G. Das bedeutet, dass die Untergruppe $\gamma_3 = [G, \gamma_2(G)]$ trivial ist. Damit hat G die Nilpotenzklasse 2 und dies ist ein Widerspruch zum Typ von G. $\square$

Als Nächstes untersuchen wir, wann eine induzierte $\mathcal{T}$-Präsentation konsistent ist.

Satz 8.1.2
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(n,1,1)$ und $\bar{G}$ eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(n,1)$ in ihrer in 7.2.2 beschriebenen kanonischen Form mit primären Invarianten $(e_1,\dots,e_s)$, so dass G isomorph zu einer Erweiterung von $\bar{G}$ mit einer zyklischen Gruppe ist. Eine von $\bar{G}$ induzierte Präsentation von G ist genau dann konsistent, wenn die beiden folgenden Bedingungen gelten.

(a) *Es gilt $\alpha_{k,n+1} = 0$ für alle $k \geq 3$.*

(b) *Es gilt $s = 1$.*

Beweis:
Nach Lemma 3.3.1 ist eine $\mathcal{T}$-Präsentation in Erzeugern $\{g_1,\dots,g_n,g_{n+1},g_{n+2}\}$ genau dann konsistent wenn für $i,j,k \in \{1,\dots,n+2\}$ mit $i<j<k$ folgende Bedingungen gelten

$$\begin{array}{lrcl} (1) & g_k(g_jg_i) & = & (g_kg_j)g_i, \\ (2) & (g_jg_i^{-1})g_i & = & g_j. \end{array}$$

Diese Bedingungen werden wir im Folgenden berechnen. Dazu sei $\boldsymbol{t_{i,j} := g_{n+2}^{\alpha_{i,j}}}$ für $1 \leq i < j \leq n+1$. Da der Erzeuger g_{n+2} zentral in G ist, müssen wir nur die nicht-trivialen Relationen betrachten. Sei zuerst $1 \leq i < j < k \leq n+1$ so, dass $[g_k, g_j]$ und $[g_j, g_i]$ von der Form (R2) sind. Wir erhalten

$$\begin{aligned} (g_kg_j)g_i &= g_jg_kt_{j,k}g_i \\ &= g_jg_ig_kt_{i,k}t_{j,k} \\ &= g_ig_jg_kt_{i,j}t_{i,k}t_{j,k}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_k(g_jg_i) &= g_kg_ig_jt_{i,j} \\ &= g_ig_kt_{i,k}g_jt_{i,j} \\ &= g_ig_jg_kt_{j,k}t_{i,k}t_{i,j}. \end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der beiden rechten Seiten liefert keine Bedingungen. Nun betrachte man die Multiplikation von Erzeugern, deren Kommutatoren von der Form (R1) sind. Man beachte, dass es bei drei Erzeugern nur ein Paar mit dieser Eigenschaft geben kann. Sei zuerst $j+1$ gerade, das heißt es gilt $j+1 = 2r$ für $1 \leq r \leq s$ und $2 \leq j+1 < k \leq n$. Dies ergibt

$$(g_kg_{j+1})g_j = g_{j+1}g_kt_{j+1,k}g_j$$

$$\begin{aligned}
&= g_{j+1}g_jg_kt_{j,k}t_{j+1,k}\\
&= g_jg_{j+1}g_{n+1}^{e_r}t_{j,j+1}g_kt_{j,k}t_{j+1,k}\\
&= g_jg_{j+1}g_kg_{n+1}^{e_r}t_{k,n+1}^{e_r}t_{j,j+1}t_{j,k}t_{j+1,k},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_k(g_{j+1}g_j) &= g_kg_jg_{j+1}g_{n+1}^{e_r}t_{j,j+1}\\
&= g_jg_kt_{j,k}g_{j+1}g_{n+1}^{e_r}t_{j,j+1}\\
&= g_jg_{j+1}g_kg_{n+1}^{e_r}t_{j+1,k}t_{j,k}t_{j,j+1}.
\end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der beiden rechten Seiten ergibt

$$t_{k,n+1}^{e_r} = 1 \Longleftrightarrow g_{n+2}^{\alpha_{k,n+1}e_r} = 1 \Longleftrightarrow \alpha_{k,n+1}e_r = 0.$$

Da $e_1 \neq 0$ gilt, erhält man $\alpha_k = 0$ für alle $k \geq 3$. Nach (a) ist diese Bedingung erfüllt. Sei weiterhin $j+1 = 2r$ für $1 \leq r \leq n$ und $1 \leq i < j \leq n-1$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned}
(g_{j+1}g_j)g_i &= g_jg_{j+1}g_{n+1}^{e_r}t_{j,j+1}g_i\\
&= g_jg_{j+1}g_ig_{n+1}^{e_r}t_{i,n+1}^{e_r}t_{j,j+1}\\
&= g_jg_ig_{j+1}t_{i,j+1}g_{n+1}^{e_r}t_{i,n+1}^{e_r}t_{j,j+1}\\
&= g_ig_jt_{i,j}g_{j+1}t_{i,j+1}g_{n+1}^{e_r}t_{i,n+1}^{e_r}t_{j,j+1}\\
&= g_ig_jg_{j+1}g_{n+1}^{e_r}t_{i,n+1}^{e_r}t_{ij}t_{i,j+1}t_{j,j+1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{j+1}(g_jg_i) &= g_{j+1}g_ig_jt_{i,j}\\
&= g_ig_{j+1}t_{i,j+1}g_jt_{i,j}\\
&= g_ig_jg_{j+1}g_{n+1}^{e_r}t_{j,j+1}t_{i,j+1}t_{ij}.
\end{aligned}$$

Das Gleichsetzen der beiden rechten Seiten ergibt

$$(*) \quad t_{i,n+1}^{e_r} = 1 \Longleftrightarrow g_{n+2}^{\alpha_{i,n+1}e_r} = 1 \Longleftrightarrow \alpha_{i,n+1}e_r = 0.$$

Nach Lemma 8.1.1 impliziert der Typ von G, dass es mindestens ein $i \in \{1,\ldots,n\}$ mit $\alpha_i \neq 0$ gibt. Nach (a) gilt $\alpha_{i,n+1} = 0$ für alle $i \geq 3$. Das bedeutet, dass es ein $i \in \{1,2\}$ gibt mit $\alpha_{i,n+1} \neq 0$. In Kombination mit den Bedingungen $i < j$ und $j+1$ gerade folgt daraus $j+1 \geq 4$. Da $r = \frac{j+1}{2}$ gilt, liefert $(*)$, dass $e_r = 0$ für alle $r \geq 2$ gilt. Mit (b) ist auch diese Bedingung und damit (1) erfüllt. Bleibt noch Bedingung (2) zu testen. Hier gilt es zwei Fälle zu berücksichtigen. Zuerst sei $1 \leq i < j \leq n+1$ so, dass $[g_j, g_i]$ von der Form (R2) ist. Man beachte, dass ein solcher Kommutator in einer zyklischen und zentralen Untergruppe von G liegt und damit $[g_j, g_i^{-1}]$ invers zu $[g_j, g_i]$ ist. Es gilt

$$\begin{aligned}
(g_jg_i^{-1})g_i &= g_i^{-1}g_jt_{-i,j}g_i\\
&= g_jt_{i,j}t_{-i,j}\\
&= g_j,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(g_{n+1}g_j^{-1})g_j &= g_j^{-1}ct_{-j,n+1}g_j\\
&= g_{n+1}t_{j,n+1}t_{-j,n+1}\\
&= g_{n+1}.
\end{aligned}$$

Nun sei $1 \leq i < j \leq n$ so, dass $[g_j, g_i]$ von der Form (R1) ist. Es gilt $j+1 = 2r$ für $1 \leq r \leq s$.

$$(g_{j+1}g_j^{-1})g_j = g_j^{-1}g_{j+1}g_{n+1}^{-e_r}t_{-j,j+1}g_j$$

$$\begin{aligned} &= g_j^{-1} g_{j+1} g_j g_{n+1}^{-e_r} t_{j,n+1}^{-e_r} t_{-j,j+1} \\ &= g_{j+1} g_{n+1}^{e_r} t_{j,j+1} g_{n+1}^{-e_r} t_{j,n+1}^{-e_r} t_{-j,j+1} \\ &= g_{j+1}(t_{j,j+1} t_{-j,j+1} t_{j,n+1}^{-e_r}). \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$(t_{j,j+1} t_{-j,j+1} t_{j,n+1}^{-e_r}) = 1 \Longleftrightarrow g_{n+2}^{\alpha_{j,j+1}+\alpha_{-j,j+1}-\alpha_{j,n+1}e_r} = 1 \Longleftrightarrow \alpha_{j,j+1} + \alpha_{-j,j+1} - \alpha_{j,n+1}e_r = 0.$$

Da $\alpha_j = 0$ für alle $j \geq 3$ gilt, erhält man $\alpha_{j,j+1} = -\alpha_{-j,j+1} \forall j \geq 3$. Diese Bedingung ist erfüllt, da für $j \geq 3$ die Kommutatoren $[g_j, g_i]$ in einer zyklischen Untergruppe von G liegen. Bleibt nur der Fall $(i,j) = (1,2)$. Dazu benötigt man den Kommutator $[g_2, g_1^{-1}]$. Dieser lässt sich aus $[g_2, g_1]$ berechnen. Man erhält $[g_2, g_1^{-1}] = g_{n+1}^{-e} g_{n+2}^{-\alpha_{1,2}+\alpha_{1,n+1}e_1}$. Damit ist die Bedingung (2) erfüllt. $\square$

Korollar 8.1.3

(a) *Eine $\mathcal{T}$-Gruppe G vom Typ $(n,1,1)$ ist eine zentrale Erweiterung der Form*

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow \bar{G} \longrightarrow 1,$$

wobei $\mathrm{Bild}(\varphi) = I_3(G)$ *gilt und $\bar{G}$ eine Gruppe vom Typ $(n,1)$ mit primärer Invariante $(e) \in \mathbb{N}^1$ ist. Daher bezeichnen wir $\bar{G}$ im Folgenden als $\bar{G}_e$.*

(b) *Eine induzierte Präsentation $P(\alpha)$ einer solchen Gruppe G ist genau dann konsistent, wenn sie zu einem Vektor*

$$\alpha = (\alpha_{i,j} \mid 1 \leq i < j \leq n) \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

mit $\alpha_{k,n+1} = 0$ für $3 \leq k \leq n$ korrespondiert.

8.2 Die zweite Kohomologiegruppe

Man kann jede $\mathcal{T}$-Gruppe G vom Typ $(n,1,1)$ als Erweiterung von $\bar{G}_e$ und einer zyklischen Gruppe auffassen. Diese Erweiterungen kann man mit Hilfe der zweiten Kohomologiegruppe $H^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z})$ beschreiben, die wir in diesem Abschnitt untersuchen. Zuerst betrachten wir die Gruppe der Kozykel $Z^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z})$. Dazu sei $\gamma \in Z^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z})$ ein solcher Kozykel. Dieser liefert eine konsistente induzierte Präsentation $P(\alpha)$ für eine Erweiterung G, siehe auch [13, Sec. 8.7] oder [3, Sec. 6.2]. Damit erhalten wir nach [13, Sec. 8.7] und Korollar 8.1.3 einen Homomorphismus

$$\begin{aligned} \varphi : Z^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}, \\ \gamma &\mapsto \alpha, \end{aligned}$$

wobei $\alpha \in \mathbb{Z}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ genau dann in $\mathrm{Bild}(\varphi)$ liegt, wenn die $n-2$ Einträge der Form $\alpha_{k,n+1}$ für $3 \leq k \leq n$ den Wert Null haben. Damit gilt $\varphi(Z^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z})) \cong \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}+2}$. Analog zu Lemma 8.47 aus [13, Sec. 8.7] gilt folgender Zusammenhang

$$H^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z}) \cong \varphi(Z^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z}))/\varphi(B^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z})).$$

Damit ist der nächste Schritt die Berechnung des Bildes der Gruppe der Koränder $B^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z})$ unter φ. Dazu brauchen wir folgende Begrifflichkeit.

Definition 8.2.1
Die Erweiterung G von $\bar{G}_e$ und $\mathbb{Z}$ zerfällt, wenn eine Untergruppe $U \leq G$ mit $UI_3(G) = G$ und $U \cap I_3(G) = \{1\}$ existiert.

Es gilt zu untersuchen, wann ein Vektor $\alpha \in \varphi(Z^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z}))$ eine zerfallende Erweiterung G definiert, um $\varphi(B^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z}))$ und damit $H^2(G, \mathbb{Z})$ zu bestimmen. Dies führt zu folgendem Satz.

Satz 8.2.2
Die zweite Kohomologiegruppe von $\bar{G}_e$ und $\mathbb{Z}$ hat folgende Form

$$H^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}+1}.$$

Beweis:
Wir nehmen an, es gibt eine zu $\bar{G}_e$ isomorphe Untergruppe $G_e \leq G$ mit $G_e \cap \langle g_{n+2} \rangle = \{1\}$ und $G_e\langle g_{n+2}\rangle = G$. Dann betrachten wir die daraus resultierenden Bedingungen. Sei $\bar{G}_e$ in der kanonischen Form mit primärer Invariante (e) gegeben und sei $(\bar{g_1}, \ldots, \bar{g_n}, \bar{g}_{n+1})$ eine dazugehörende $\mathcal{T}$-Sequenz. Sei ψ diejenige Einbettung von $\bar{G}_e$ in $G_e\langle g_{n+2}\rangle = G$, die für $1 \leq j \leq n+1$ und $x_j \in \mathbb{Z}$ die Elemente $\bar{g_j} \in \bar{G}$ wie folgt nach $G_e\langle g_{n+2}\rangle = G$ abbildet

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \bar{G}_e & \longrightarrow & G_e\langle g_{n+2}\rangle = G, \\ & \bar{g_j} & \mapsto & g_j g_{n+2}^{x_j}. \end{array}$$

Die Relationen aus $\bar{G}_e$ übertragen sich mittels ψ wie folgt nach $G_e\langle g_{n+2}\rangle$. Zuerst betrachten wir die Relation $\bar{g_2}\bar{g_1} = \bar{g_1}\bar{g_2}\bar{g}_{n+1}^e$

$$\begin{array}{rlcl} & \psi(\bar{g_2}\bar{g_1}) & = & \psi(\bar{g_1}\bar{g_2}\bar{g}_{n+1}^e) \\ \Longleftrightarrow & \psi(\bar{g_2})\psi(\bar{g_1}) & = & \psi(\bar{g_1})\psi(\bar{g_2})\psi(\bar{g}_{n+1})^e \\ \Longleftrightarrow & g_2 g_{n+2}^{x_2} g_1 g_{n+2}^{x_1} & = & g_1 g_{n+2}^{x_1} g_2 g_{n+2}^{x_2} (g_{n+1} g_{n+2}^{x_{n+1}})^e \\ \Longleftrightarrow & g_2 g_1 g_{n+2}^{x_1} g_{n+2}^{x_2} & = & g_1 g_2 g_{n+1}^e g_{n+2}^{e x_{n+1}} g_{n+2}^{x_1} g_{n+2}^{x_2} \\ \Longleftrightarrow & g_2 g_1 & = & g_1 g_2 g_{n+1}^e g_{n+2}^{e x_{n+1}}. \end{array}$$

Danach betrachten wir die trivialen Relationen aus $\bar{G}_e$. Für $1 \leq i < j \leq n+1$ mit $(i,j) \neq (1,2)$ gilt

$$\begin{array}{rlcl} & \psi(\bar{g_j}\bar{g_i}) & = & \psi(\bar{g_i}\bar{g_j}) \\ \Longleftrightarrow & \psi(\bar{g_j})\psi(\bar{g_i}) & = & \psi(\bar{g_i})\psi(\bar{g_j}) \\ \Longleftrightarrow & g_j g_{n+2}^{x_j} g_i g_{n+2}^{x_i} & = & g_i g_{n+2}^{x_i} g_j g_{n+2}^{x_j} \\ \Longleftrightarrow & g_j g_i g_{n+2}^{x_i} g_{n+2}^{x_j} & = & g_i g_j g_{n+2}^{x_i} g_{n+2}^{x_j} \\ \Longleftrightarrow & g_j g_i & = & g_i g_j. \end{array}$$

Nun betrachtet man im Vergleich dazu die Relationen aus G. Für $1 \leq i < j \leq n+1$ mit $(i,j) \neq (1,2)$ gilt

$$\begin{array}{rcl} g_2 g_1 & = & g_2 g_1 g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha_{1,2}}, \\ g_j g_i & = & g_i g_j g_{n+2}^{\alpha_{i,j}}. \end{array}$$

Damit $G_e\langle g_{n+2}\rangle = G$ gilt, müssen die Relationen übereinstimmen. Dieser Vergleich liefert für $1 \leq i < j \leq n+1$ mit $(i,j) \neq (1,2)$ folgende Bedingungen

$$\begin{array}{rcl} g_1 g_2 g_{n+1}^e g_{n+2}^{e x_{n+1}} & = & g_2 g_1 g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha_{1,2}}, \\ g_i g_j & = & g_i g_j g_{n+2}^{\alpha_{i,j}}. \end{array}$$

Wir erhalten als Ergebnis $\alpha_{1,2} \in e\mathbb{Z}$ und $\alpha_{i,j} = 0$ für alle $1 \leq i < j \leq n$ mit $(i,j) \neq (1,2)$. Damit ist die Aussage des Satzes gezeigt. $\square$

Korollar 8.2.3
Eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(n,1,1)$ wird demnach durch eine natürliche Zahl $e \in \mathbb{N}$ und einen Vektor $\alpha \in \mathbb{Z}/e\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{\frac{n(n-1)}{2}+1}$ beschrieben.

8.3 Reduktion der $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (n,1,1)

Sei nun eine $\mathcal{T}$-Gruppe G durch solch einem Vektor α gegeben. Das Ziel ist es α und damit die induzierte Präsentation $P(\alpha)$ von G zu reduzieren. Dies geschieht durch die Umformung von α zu einem Vektor $\bar{\alpha}$, der eine zu G isomorphe Gruppe beschreibt, dabei möglichst dünn besetzt ist, und dessen Einträge wenn möglich positiv und /oder betragsmäßig klein sind. Dazu betrachte man die Operation der kompatiblen Paare des Quotienten $\bar{G}_e$ und der zyklischen Gruppe $\mathbb{Z}$ auf der zweiten Kohomologiegruppe $H^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z})$. Da $\mathbb{Z}$ mit den Elementen aus $\bar{G}$ kommutiert, ist die Abbildung $\varphi : \bar{G}_e \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$ mit $g^\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : a \mapsto a^g = a$ trivial und somit entspricht die Menge der kompatiblen Paare von $\bar{G}_e$ und $\mathbb{Z}$ genau dem direkten Produkt $T = \mathrm{Aut}(\bar{G}_e) \times \mathrm{Aut}(\mathbb{Z})$. Da die $\mathcal{T}$-Gruppe G, als Erweiterung von $\bar{G}_e$ mit einer zyklischen Gruppe, vom Typ $(n,1,1)$ ist, muss $\bar{G}_e$ nach Satz 8.1.2 eine $\mathcal{T}$-Gruppe des Typs $(n,1)$ mit nur einer primären Invarianten (e) sein. Damit hat $\bar{G}_e$ in kanonischer Form eine Präsentation in $g_1, \dots, g_n, g_{n+1}$ mit genau einer nicht-triviale Relation, nämlich

$$g_2 g_1 = g_1 g_2 g_{n+1}^e.$$

Als Nächstes müssen wir die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(\bar{G}_e)$ von $\bar{G}_e$ bestimmen. Eine Möglichkeit diese darzustellen haben wir in Abschnitt 7.2.2 beschrieben. Da wir in diesem Kontext nur Gruppen $\bar{G}_e$ mit einer primären Invarianten betrachten, können wir nach Bemerkung 7.2.6 ein Erzeugendensystem für $\mathrm{Aut}(\bar{G}_e)$ angeben. Seien

$$\tau \in \left\{ \left(\begin{array}{cc} Z & V \\ 0 & W \end{array} \right) \middle| Z \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}), W \in \mathrm{GL}_{n-2}(\mathbb{Z}), V \in \mathbb{Z}^{2\times n-2} \right\} \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{Z}) \text{ und } y = \det(Z).$$

Dann besteht die Automorphismengruppe von $\bar{G}_e$ aus 2-Tupeln der Form (τ, y) und dem Erzeugnis von $\phi_1, \dots, \phi_n \in \mathrm{Aut}(G)$ mit $\phi_i(g_i) = g_i g_{n+1}$ und $\phi_i(g_j) = g_j$ für $1 \le i, j \le n$ und $i \ne j$.

Da die Automorphismengruppe von $\mathbb{Z}$ genau aus $\{\pm 1\}$ besteht, erhält man für T die 3-Tupel (τ, y, z) beziehungsweise 2-Tupel (ϕ, z) mit $z \in \{\pm 1\}$. Nun lässt man T auf $H^2(\bar{G}_e, \mathbb{Z})$ operieren. Wir betrachten zuerst die 3-Tupel schrittweise bezüglich der Erzeuger von $\mathrm{Aut}(\bar{G}_e)$, die durch Z, V und W gegeben sind, und dann die 2-Tupel. Da sich die Operationen mit $(\tau, y, -1)$ beziehungsweise $(\phi, -1)$ aus den Operationen mit $(\tau, y, 1)$ beziehungsweise $(\phi, 1)$ berechnen lassen, reicht es die jeweils ersteren zu bestimmen.

Im ersten Schritt betrachten wir die drei Erzeuger der Automorphismengruppe von $\bar{G}_e$ mit der Eigenschaft

$$Z \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, V = 0, W = I_{n-2} \text{ und } y = \det(Z).$$

Wir definieren $\varphi_1 = (\tau_1, 1, 1)$

$$\begin{aligned} \varphi_1 : \; g_1 &\mapsto g_1 g_2, \\ g_i &\mapsto g_i \text{ für } 2 \le i \le n, \\ g_{n+1} &\mapsto g_{n+1}, \\ g_{n+2} &\mapsto g_{n+2}. \end{aligned}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j \neq 1$ und $\alpha'_{2,n+1} = \alpha_{2,n+1}$.
Sei $k \geq 3$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_1(g_k)\varphi_1(g_1) & = & \varphi_1(g_1)\varphi_1(g_k)\varphi_1(g_{n+2})^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_k g_1 g_2 & = & g_1 g_2 g_k g_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_k g_{n+2}^{\alpha_{1,k}} g_2 & = & g_1 g_2 g_k g_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_2 g_k g_{n+2}^{\alpha_{1,k}+\alpha_{2,k}} & = & g_1 g_2 g_k g_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\alpha'_{1,k} = \alpha_{1,k} + \alpha_{2,k}} \quad \text{für} \quad 3 \leq k \leq n.$$

Sei $k = 2$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_1(g_2)\varphi_1(g_1) & = & \varphi_1(g_1)\varphi_1(g_2)\varphi_1(g_{n+1})^e\varphi_1(g_{n+2})^{\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_2 g_1 g_2 & = & g_1 g_2 g_2 g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_2 g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha_{1,2}} g_2 & = & g_1 g_2 g_2 g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_2 g_2 g_{n+1}^e g_{n+2}^{e\alpha_{2,n+1}+\alpha_{1,2}} & = & g_1 g_2 g_2 g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\alpha'_{1,2} = \alpha_{1,2} + e\alpha_{2,n+1}}$$

und

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_1(g_{n+1})\varphi_1(g_1) & = & \varphi_1(g_1)\varphi_1(g_{n+1})\varphi_1(g_{n+2})^{\alpha'_1} \\ \Longleftrightarrow & g_{n+1} g_1 g_2 & = & g_1 g_2 g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{1,n+1}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} g_2 & = & g_1 g_2 g_{n+1}^{\alpha'_{1,n+1}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_2 g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}+\alpha_{2,n+1}} & = & g_1 g_2 g_{n+1}^{\alpha'_{1,n+1}} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\alpha'_{1,n+1} = \alpha_{1,n+1} + \alpha_{2,n+1}}.$$

Als Nächstes betrachten wir $\varphi_2 = (\tau_2, -1, 1)$

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_2 : & g_1 & \mapsto & g_2, \\ & g_2 & \mapsto & g_1, \\ & g_i & \mapsto & g_i \text{ für } 3 \leq i \leq n, \\ & g_{n+1} & \mapsto & g_{n+1}^{-1}, \\ & g_{n+2} & \mapsto & g_{n+2}. \end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j, k \notin \{1, 2\}$.
Sei $k \geq 3$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_2(g_k)\varphi_2(g_1) & = & \varphi_2(g_1)\varphi_2(g_k)\varphi_2(g_{n+2})^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_k g_2 & = & g_2 g_k g_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_2 g_k g_{n+2}^{\alpha'_{2,k}} & = & g_2 g_k g_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\alpha'_{1,k} = \alpha_{2,k}} \quad \text{für} \quad 3 \leq k \leq n$$

und

$$\begin{array}{rll} & \varphi_2(g_k)\varphi_2(g_2) &= \varphi_2(g_2)\varphi_1(g_k)\varphi_2(g_{n+2})^{\alpha'_{2,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_k g_1 &= g_1 g_k g_{n+2}^{\alpha'_{2k}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_k g_{n+2}^{\alpha_{1,k}} &= g_1 g_k g_{n+2}^{\alpha'_{2k}} \\ & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{2,k} = \alpha_{1,k}} & \text{für} \quad 3 \leq k \leq n. \end{array}$$

Sei $k = 2$

$$\begin{array}{rll} & \varphi_2(g_2)\varphi_2(g_1) &= \varphi_2(g_1)\varphi_2(g_2)\varphi_2(g_{n+1})^e\varphi_2(g_{n+2})^{\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_2 &= g_2 g_1 g_{n+1}^{-e} g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_2 &= g_1 g_2 g_{n+1}^{e} g_{n+2}^{\alpha_{1,2}} g_{n+1}^{-e} g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_2 &= g_1 g_2 g_{n+2}^{\alpha_{1,2}+\alpha'_{1,2}} \\ & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,2} = -\alpha_{1,2}}, & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & \varphi_2(g_{n+1})\varphi_2(g_1) &= \varphi_2(g_1)\varphi_2(g_{n+1})\varphi_2(g_{n+2})^{\alpha'_{1,n+1}} \\ \Longleftrightarrow & g_{n+1}^{-1} g_2 &= g_2 g_{n+1}^{-1} g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} \\ \Longleftrightarrow & g_2 g_{n+1}^{-1} g_{n+2}^{-\alpha_{2,n+1}} &= g_2 g_{n+1}^{-1} g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} \\ & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,n+1} = -\alpha_{2,n+1}} & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rll} & \varphi_2(g_{n+1})\varphi_2(g_2) &= \varphi_2(g_2)\varphi_2(g_{n+1})\varphi_2(g_{n+2})^{\alpha'_2} \\ \Longleftrightarrow & g_{n+1}^{-1} g_1 &= g_1 g_{n+1}^{-1} g_{n+2}^{\alpha'_{2,n+1}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_{n+1}^{-1} g_{n+2}^{-\alpha_{1,n+1}} &= g_1 g_{n+1}^{-1} g_{n+2}^{\alpha'_{2,n+1}} \\ & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{2,n+1} = -\alpha_{1,n+1}}. & \end{array}$$

Nun betrachten wir $\varphi_3 = (\tau_3, -1, 1)$

$$\begin{array}{rlll} \varphi_3: & g_1 & \mapsto & g_1{-1}, \\ & g_i & \mapsto & g_i \text{ für } 2 \leq i \leq n, \\ & g_{n+1} & \mapsto & g_{n+1}^{-1}, \\ & g_{n+2} & \mapsto & g_{n+2}. \end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j \neq 1$
Sei $k \geq 3$

$$\begin{array}{rll} & \varphi_3(g_k)\varphi_3(g_1) &= \varphi_3(g_1)\varphi_3(g_k)\varphi_3(g_{n+2})^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_k g_1^{-1} &= g_1^{-1} g_k g_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_1^{-1} g_k g_{n+2}^{-\alpha'_{1,k}} &= g_1^{-1} g_k g_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,k} = -\alpha_{1,k}} & \text{für} \quad 3 \leq k \leq n. \end{array}$$

Sei $k = 2$

$$\begin{array}{rll} & \varphi_3(g_2)\varphi_3(g_1) & = \varphi_3(g_1)\varphi_3(g_2)\varphi_3(g_{n+1})^e\varphi_3(g_{n+2})^{\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_2g_1^{-1} & = g_1^{-1}g_2c^{-e}g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_1^{-1}g_2g_{n+1}^{-1}g_{n+2}^{e\alpha_{1,n+1}-\alpha_{1,2}} & = g_1^{-1}g_2g_{n+1}^{-e}g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,2} = -\alpha_{1,2} + e\alpha_{1,n+1}}, & \end{array}$$

$$\begin{array}{rll} & \varphi_3(g_{n+1})\varphi_3(g_1) & = \varphi_3(g_1)\varphi_3(g_{n+1})\varphi_3(g_{n+2})^{\alpha'_1} \\ \Longleftrightarrow & g_{n+1}^{-1}g_1^{-1} & = g_1^{-1}g_{n+1}^{-1}g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} \\ \Longleftrightarrow & g_1^{-1}g_{n+1}^{-1}g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} & = g_1^{-1}g_{n+1}^{-1}g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} \\ & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,n+1} = \alpha_{1,n+1}} & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rll} & \varphi_3(g_{n+1})\varphi_3(g_2) & = \varphi_3(g_2)\varphi_3(g_{n+1})\varphi_3(g_{n+2})^{\alpha'_2} \\ \Longleftrightarrow & g_{n+1}^{-1}g_2 & = g_2g_{n+1}^{-1}g_{n+2}^{\alpha'_{2,n+1}} \\ \Longleftrightarrow & g_2g_{n+1}^{-1}g_{n+2}^{-\alpha_{2,n+1}} & = g_2g_{n+1}^{-1}g_{n+2}^{\alpha'_{2,n+1}} \\ & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{2,n+1} = -\alpha_{2,n+1}}. & \end{array}$$

Im zweiten Schritt werten wir die Erzeuger der Automorphismengruppe von G aus, die durch V gegeben sind, mit $Z = I_2, W = I_{n-2}, y = \det I_2 = 1$.
Für $3 \leq i \leq n$ erhalten wir $\varphi_{1i} = (\tau_{1i}, 1, 1)$

$$\begin{array}{rlll} \varphi_{1i}: & g_1 & \mapsto & g_1g_i, \\ & g_s & \mapsto & g_s \text{ für } 2 \leq s \leq n, \\ & g_{n+1} & \mapsto & g_{n+1}, \\ & g_{n+2} & \mapsto & g_{n+2}. \end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j \neq 1$ und $\alpha'_{2,n+1} = \alpha_{2,n+1}$.
Sei $k > i \geq 3$

$$\begin{array}{rll} & \varphi_{1i}(g_k)\varphi_{1i}(g_1) & = \varphi_{1i}(g_1)\varphi_{1i}(g_k)\varphi_{1i}(g_{n+2})^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_kg_1g_i & = g_1g_ig_kg_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_1g_kg_{n+2}^{\alpha_{1,k}}g_i & = g_1g_ig_kg_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_1g_ig_kg_{n+2}^{\alpha_{1,k}+\alpha_{i,k}} & = g_1g_ig_kg_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,k} = \alpha_{1,k} + \alpha_{i,k}} & \text{für } \ 3 \leq i < k \leq n. \end{array}$$

Sei $1 < k < i \leq n$

$$\begin{array}{rll} & \varphi_{1i}(g_k)\varphi_{1i}(g_1) & = \varphi_{1i}(g_1)\varphi_{1i}(g_k)\varphi_{1i}(g_{n+2})^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_kg_1g_i & = g_1g_ig_kg_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_kg_1g_{n+2}^{\alpha_{1,k}}g_i & = g_1g_kg_ig_{n+2}^{\alpha_{ki}+\alpha'_{1,k}} \\ & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,k} = \alpha_{1,k} - \alpha_{ki}}. & \end{array}$$

Sei $k = 2$

$$\begin{array}{lll} & \varphi_{1i}(g_2)\varphi_{1i}(g_1) & = \varphi_{1i}(g_1)\varphi_{1i}(g_2)\varphi_{1i}(g_{n+1})^e\varphi_{1i}(g_{n+2})^{\alpha'_{1,2}} \\ \iff & g_2g_1g_i & = g_1g_ig_2g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ \iff & g_1g_2g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha_{1,2}} g_i & = g_1g_2g_ig_{n+2}^{\alpha_{2,i}} g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ \iff & g_1g_2g_ig_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha_{1,2}} & = g_1g_2g_ig_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}+\alpha_{2,i}} \\ & & \\ \implies & \underline{\alpha'_{1,2} = \alpha_{1,2} - \alpha_{2,i}} & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{lll} & \varphi_{1i}(g_{n+1})\varphi_{1i}(g_1) & = \varphi_{1i}(g_1)\varphi_{1i}(g_{n+1})\varphi_{1i}(g_{n+2})^{\alpha'_{1,n+1}} \\ \iff & g_{n+1}g_1g_i & = g_1g_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{1,n+1}} \\ \iff & g_1g_{n+1}g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} g_i & = g_1g_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{1,n+1}} \\ \iff & g_1g_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} & = g_1g_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{1,n+1}} \\ & & \\ \implies & \underline{\alpha'_{1,n+1} = \alpha_{1,n+1}}. & \end{array}$$

Als Nächstes betrachten wir für $3 \leq i \leq n$ $\varphi_{2i} = (\tau_{2i}, 1, 1)$

$$\begin{array}{rlll} \varphi_{2i}: & g_1 & \mapsto & g_1, \\ & g_2 & \mapsto & g_2g_i, \\ & g_s & \mapsto & g_s \text{ für } 3 \leq s \leq n, \\ & g_{n+1} & \mapsto & g_{n+1}, \\ & g_{n+2} & \mapsto & g_{n+2}. \end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j, k \neq 2$ und $\alpha'_{1,n+1} = \alpha_{1,n+1}$.
Sei $k > i \geq 3$

$$\begin{array}{lll} & \varphi_{2i}(g_k)\varphi_{2i}(g_2) & = \varphi_{2i}(g_2)\varphi_{2i}(g_k)\varphi_{2i}(g_{n+2})^{\alpha'_{2,k}} \\ \iff & g_kg_2g_i & = g_2g_ig_kg_{n+2}^{\alpha'_{2,k}} \\ \iff & g_2g_kg_{n+2}^{\alpha_{2,k}} g_i & = g_2g_ig_kg_{n+2}^{\alpha'_{2,k}} \\ \iff & g_2g_ig_kg_{n+2}^{\alpha_{2,k}+\alpha_{i,k}} & = g_2g_ig_kg_{n+2}^{\alpha'_{2,k}} \\ & & \\ \implies & \underline{\alpha'_{2,k} = \alpha_{2,k} + \alpha_{i,k}} & \text{für} \quad 3 \leq i < k \leq n. \end{array}$$

Sei $2 < k < i \leq n$

$$\begin{array}{lll} & \varphi_{2i}(g_k)\varphi_{2i}(g_2) & = \varphi_{2i}(g_2)\varphi_{2i}(g_k)\varphi_{2i}(g_{n+2})^{\alpha'_{2,k}} \\ \iff & g_kg_2g_i & = g_2g_ig_kg_{n+2}^{\alpha'_{2,k}} \\ \iff & g_2g_kg_{n+2}^{\alpha_{2,k}} g_i & = g_2g_kg_ig_{n+2}^{\alpha_{ki}+\alpha'_{2,k}} \\ & & \\ \implies & \underline{\alpha'_{2,k} = \alpha_{2,k} - \alpha_{ki}} & \text{für} \quad 1 \leq k < i \leq n. \end{array}$$

Sei $k = 2$

$$\begin{array}{lll} & \varphi_{2i}(g_2)\varphi_{2i}(g_1) & = \varphi_{2i}(g_1)\varphi_{2i}(g_2)\varphi_{2i}(g_{n+1})^e\varphi_{2i}(g_{n+2})^{\alpha'_{1,2}} \\ \iff & g_2g_ig_1 & = g_1g_2g_ig_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ \iff & g_2g_1g_ig_{n+2}^{\alpha_{1,i}} & = g_1g_2g_ig_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ \iff & g_1g_2g_ig_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha_{1,2}+\alpha_{1,i}} & = g_1g_2g_ig_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}+\alpha_{2,i}} \end{array}$$

$$\implies \underline{\alpha'_{1,2} = \alpha_{1,2} + \alpha_{1,i}}$$

und

$$\begin{array}{lll} & \varphi_{2i}(g_{n+1})\varphi_{2i}(g_2) & = \varphi_{2i}(g_2)\varphi_{2i}(g_{n+1})\varphi_{2i}(g_{n+2})^{\alpha'_2} \\ \iff & g_{n+1}g_2g_i & = g_2g_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{2,n+1}} \\ \iff & g_2g_{n+1}g_{n+2}^{\alpha_{2,n+1}}g_i & = g_2g_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{2,n+1}} \\ \iff & g_2g_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha_{2,n+1}} & = g_2g_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{2,n+1}} \\ \implies & \underline{\alpha'_{2,n+1} = \alpha_{2,n+1}}. & \end{array}$$

Im dritten Schritt betrachten wir die vier Erzeuger der Automorphismengruppe von G mit der Eigenschaft

$$W \in \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{Z}^{(n-2)\times(n-2)}, Z = I_2, V = 0, y = \det(Z) = 1.$$

An dieser Stelle sollten wir bedenken, dass die betrachtete Menge im Fall $n = 2$ leer ist, im Fall $n = 3$ nur die Elemente ± 1 enthält, im Fall $n = 4$ nur die ersten drei Matrizen enthält (die vierte entspricht der ersten) und erst für $n \geq 5$ alle vier Matrizen enthält. Wir erhalten demnach $\varphi_A = (\tau_A, 1, 1)$

$$\begin{array}{lll} \varphi_A: & g_3 & \mapsto g_3g_4, \\ & g_s & \mapsto g_s \text{ für } s \neq 3, \\ & g_{n+1} & \mapsto g_{n+1}, \\ & g_{n+2} \mapsto g_{n+2}. & \end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j, k \neq 3$ und $\alpha'_i = \alpha_i$ für $i \in \{1, 2\}$.
Sei $j < 3, k = 3$

$$\begin{array}{lll} & \varphi_A(g_3)\varphi_A(g_j) & = \varphi_A(g_j)\varphi_A(g_3)\varphi_A(g_{n+2})^{\alpha'_{j,3}} \\ \iff & g_3g_4g_j & = g_jg_3g_4g_{n+2}^{\alpha'_{j,3}} \\ \iff & g_3g_jg_4g_{n+2}^{\alpha_{j,4}} & = g_jg_3g_4g_{n+2}^{\alpha'_{j,3}} \\ \iff & g_jg_3g_{n+2}^{\alpha_{j,3}}g_4g_{n+2}^{\alpha_{j,4}} & = g_jg_3g_4g_{n+2}^{\alpha'_{j,3}} \\ \iff & g_jg_3g_4g_{n+2}^{\alpha_{j,3}+\alpha_{j,4}} & = g_jg_3g_4g_{n+2}^{\alpha'_{j,3}} \end{array}$$

$$\implies \underline{\alpha'_{j,3} = \alpha_{j,3} + \alpha_{j,4}} \quad \text{für} \quad 1 \leq j \leq 2.$$

Sei $j = 3$ und $k = 4$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_A(g_4)\varphi_A(g_3) & = & \varphi_A(g_3)\varphi_A(g_4)\varphi_A(g_{n+2})^{\alpha'_{3,4}} \\ \Longleftrightarrow & g_4g_3g_4 & = & g_3g_4g_4g_{n+2}^{\alpha'_{3,4}} \\ \Longleftrightarrow & g_3g_4g_{n+2}^{\alpha_{3,4}}g_4 & = & g_3g_4^2g_{n+2}^{\alpha'_{3,4}} \\ \Longleftrightarrow & g_3g_4^2g_{n+2}^{\alpha_{3,4}} & = & g_3g_4^2g_{n+2}^{\alpha'_{3,4}} \\ & & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{3,4} = \alpha_{3,4}}. & & \end{array}$$

Sei $j = 3$ und $k > 4$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_A(g_k)\varphi_A(g_3) & = & \varphi_A(g_3)\varphi_A(g_k)\varphi_A(g_{n+2})^{\alpha'_{3,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_kg_3g_4 & = & g_3g_4g_kg_{n+2}^{\alpha'_{3,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_3g_kg_{n+2}^{\alpha_{3,k}}g_4 & = & g_3g_4g_kg_{n+2}^{\alpha'_{3,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_3g_4g_kg_{n+2}^{\alpha_{4,k}+\alpha_{3,k}} & = & g_3g_4g_kg_{n+2}^{\alpha'_{3,k}} \\ & & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{3,k} = \alpha_{3,k} + \alpha_{4,k}}. & & \end{array}$$

Weiter sei $\varphi_B = (\tau_B, 1, 1)$

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_B : & g_3 & \mapsto & g_4, \\ & g_4 & \mapsto & g_3, \\ & g_s & \mapsto & g_s \text{ für } s \notin 3,4, \\ & g_{n+1} & \mapsto & g_{n+1}, \\ & g_{n+2} & \mapsto & g_{n+2}. \end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j,k \notin 3,4$ und $\alpha'_i = \alpha_i$ für $i \in \{1,2\}$.
Sei $j < 3, k = 3$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_B(g_3)\varphi_B(g_j) & = & \varphi_B(g_j)\varphi_B(g_3)\varphi_B(g_{n+2})^{\alpha'_{j,3}} \\ \Longleftrightarrow & g_4g_j & = & g_jg_4g_{n+2}^{\alpha'_{j,3}} \\ \Longleftrightarrow & g_jg_4g_{n+2}^{\alpha_{j,4}} & = & g_jg_4g_{n+2}^{\alpha'_{j,3}} \\ & & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{j,3} = \alpha_{j,4}} & & \text{für} \quad 1 \leq j \leq 2. \end{array}$$

Sei $j < 3, k = 4$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_B(g_4)\varphi_B(g_j) & = & \varphi_B(g_j)\varphi_B(g_4)\varphi_B(g_{n+2})^{\alpha'_{j,4}} \\ \Longleftrightarrow & g_3g_j & = & g_jg_3g_{n+2}^{\alpha'_{j,4}} \\ \Longleftrightarrow & g_jg_3g_{n+2}^{\alpha_{j,3}} & = & g_jg_3g_{n+2}^{\alpha'_{j,4}} \\ & & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{j,4} = \alpha_{j,3}} & & \text{für} \quad 1 \leq j \leq 2. \end{array}$$

Sei $j = 3$ und $k = 4$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_B(g_4)\varphi_B(g_3) & = & \varphi_B(g_3)\varphi_B(g_4)\varphi_B(g_{n+2})^{\alpha'_{3,4}} \\ \iff & g_3g_4 & = & g_4g_3g_{n+2}^{\alpha'_{3,4}} \\ \iff & g_3g_4 & = & g_3g_4g_{n+2}^{\alpha_{3,4}\alpha'_{3,4}} \\ \\ \implies & \underline{\alpha'_{3,4} = -\alpha_{3,4}}. & & \end{array}$$

Sei $j = 3$ und $k > 4$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_B(g_k)\varphi_B(g_3) & = & \varphi_B(g_3)\varphi_B(g_k)\varphi_B(g_{n+2})^{\alpha'_{3,k}} \\ \iff & g_kg_4 & = & g_4g_kg_{n+2}^{\alpha'_{3,k}} \\ \iff & g_4g_kg_{n+2}^{\alpha_{4,k}} & = & g_4g_kg_{n+2}^{\alpha'_{3,k}} \\ \\ \implies & \underline{\alpha'_{3,k} = \alpha_{4,k}} & \text{für} & 5 \le k \le n. \end{array}$$

Sei $j = 4$ und $k > 4$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_B(g_k)\varphi_B(g_4) & = & \varphi_B(g_4)\varphi_B(g_k)\varphi_B(g_{n+2})^{\alpha'_{4,k}} \\ \iff & g_kg_3 & = & g_3g_kg_{n+2}^{\alpha'_{4,k}} \\ \iff & g_3g_kg_{n+2}^{\alpha_{3,k}} & = & g_3g_kg_{n+2}^{\alpha'_{4,k}} \\ \\ \implies & \underline{\alpha'_{4,k} = \alpha_{3,k}} & \text{für} & 5 \le k \le n. \end{array}$$

Sei nun $\varphi_C = (\tau_C, 1, 1)$

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_C: & g_3 & \mapsto & g_3^{-1}, \\ & g_s & \mapsto & g_s \text{ für } s \neq 3, \\ & g_{n+1} & \mapsto & g_{n+1}, \\ & g_{n+2} & \mapsto & g_{n+2}. \end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j,k \neq 3$ und $\alpha'_i = \alpha_i$ für $i \in \{1,2\}$.
Sei $j < 3, k = 3$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_C(g_3)\varphi_C(g_j) & = & \varphi_C(g_j)\varphi_C(g_3)\varphi_C(g_{n+2})^{\alpha'_{j,3}} \\ \iff & g_3^{-1}g_j & = & g_jg_3^{-1}g_{n+2}^{\alpha'_{j,3}} \\ \iff & g_jg_3^{-1}g_{n+2}^{-\alpha_{j,3}} & = & g_jg_3^{-1}g_{n+2}^{\alpha'_{j,3}} \\ \\ \implies & \underline{\alpha'_{j,3} = -\alpha_{j,3}} & \text{für} & 1 \le j \le 2. \end{array}$$

Sei $j = 3$ und $k > 3$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_C(g_k)\varphi_C(g_3) & = & \varphi_C(g_3)\varphi_C(g_k)\varphi_C(g_{n+2})^{\alpha'_{3,k}} \\ \iff & g_kg_3^{-1} & = & g_3^{-1}g_kg_{n+2}^{\alpha'_{3,k}} \\ \iff & g_3^{-1}g_kg_{n+2}^{-\alpha_{3,k}} & = & g_3^{-1}g_kg_{n+2}^{\alpha'_{3,k}} \\ \\ \implies & \underline{\alpha'_{3,k} = -\alpha_{3,k}} & \text{für} & 4 \le k \le n. \end{array}$$

Sei $\varphi_D = (\tau_D, 1, 1)$

$$\begin{array}{rlcl} \varphi_D: & g_s & \mapsto & g_s,\ 1 \le s \le 2, \\ & g_s & \mapsto & g_{s+1},\ 3 \le s \le n-1, \\ & g_n & \mapsto & g_3, \\ & g_{n+1} & \mapsto & g_{n+1}, \\ & g_{n+2} & \mapsto & g_{n+2}. \end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{1,2} = \alpha_{1,2}$ und $\alpha'_i = \alpha_i$ für $i \in \{1,2\}$.
Sei $1 \le j \le 2, 3 \le k \le n-1$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_D(g_k)\varphi_D(g_j) & = & \varphi_D(g_j)\varphi_C(g_k)\varphi_D(g_{n+2})^{\alpha'_{j,k}} \\ \iff & g_{k+1}g_j & = & g_j g_{k+1} g_{n+2}^{\alpha'_{j,k}} \\ \iff & g_j g_{k+1} g_{n+2}^{\alpha_{j,k+1}} & = & g_j g_{k+1} g_{n+2}^{\alpha'_{j,k}} \\ & & & \\ \implies & \underline{\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k+1}} & & \text{für} \quad 1 \le j \le 2 \text{ und } 3 \le k \le n-1. \end{array}$$

Sei $3 \le j < k \le n-1$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_D(g_k)\varphi_D(g_j) & = & \varphi_D(g_j)\varphi_C(g_k)\varphi_D(g_{n+2})^{\alpha'_{j,k}} \\ \iff & g_{k+1}g_{j+1} & = & g_{j+1} g_{k+1} g_{n+2}^{\alpha'_{j,k}} \\ \iff & g_{j+1} g_{k+1} g_{n+2}^{\alpha_{j+1,k+1}} & = & g_{j+1} g_{k+1} g_{n+2}^{\alpha'_{j,k}} \\ & & & \\ \implies & \underline{\alpha'_{j,k} = \alpha_{j+1,k+1}} & & \text{für} \quad 3 \le j < k \le n-1. \end{array}$$

Sei $1 \le j \le 2, k = n$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_D(g_n)\varphi_D(g_j) & = & \varphi_D(g_j)\varphi_C(g_n)\varphi_D(g_{n+2})^{\alpha'_{j,n}} \\ \iff & g_3 g_j & = & g_j g_3 g_{n+2}^{\alpha'_{j,n}} \\ \iff & g_j g_3 g_{n+2}^{\alpha_{j,3}} & = & g_j g_3 g_{n+2}^{\alpha'_{j,n}} \\ & & & \\ \implies & \underline{\alpha'_{j,n} = \alpha_{j,3}} & & \text{für} \quad 1 \le j \le 2. \end{array}$$

Sei $3 \le j \le n-1, k = n$

$$\begin{array}{rlcl} & \varphi_D(g_n)\varphi_D(g_j) & = & \varphi_D(g_j)\varphi_C(g_n)\varphi_D(g_{n+2})^{\alpha'_{j,n}} \\ \iff & g_3 g_{j+1} & = & g_{j+1} g_3 g_{n+2}^{\alpha'_{j,n}} \\ \iff & g_3 g_{j+1} & = & g_3 g_{j+1} g_{n+2}^{\alpha_{3,j+1}+\alpha'_{j,n}} \\ & & & \\ \implies & \underline{\alpha'_{j,n} = -\alpha_{3,j+1}} & & \text{für} \quad 3 \le j \le n-1. \end{array}$$

Betrachte im letzten Schritt die durch $\phi_1, \ldots, \phi_n$ gegebenen Erzeuger der Automorphismengruppe von G mit $Z = I_2, Y = 0, W = I_{n-2}$.
Sei $\Phi_1 = (\phi_1, 1)$

$$\begin{array}{rlcl} \Phi_1: & g_1 & \mapsto & g_1 g_{n+1}, \\ & g_s & \mapsto & g_s,\ s \ne 1, \\ & g_{n+1} & \mapsto & g_{n+1}, \\ & g_{n+2} & \mapsto & g_{n+2}. \end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j, k \neq 1$ und $\alpha'_{2,n+1} = \alpha_{2,n+1}$.
Sei $3 \leq k \leq n$

$$\begin{array}{rlcl} & \Phi_1(g_k)\Phi_1(g_1) & = & \Phi_1(g_1)\Phi_1(g_k)\Phi_1(g_{n+2})^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_k g_1 g_{n+1} & = & g_1 g_{n+1} g_k g_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_k g_{n+2}^{\alpha_{1,k}} g_{n+1} & = & g_1 g_k g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_k g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha_{1,k}} & = & g_1 g_k g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{1,k}} \\ & & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,k} = \alpha_{1,k}} & & \text{für} \quad 3 \leq k \leq n. \end{array}$$

Sei $k = 2$

$$\begin{array}{rlcl} & \Phi_1(g_2)\Phi_1(g_1) & = & \Phi_1(g_1)\Phi_1(g_2)\Phi_1(g_{n+1})^e\Phi_1(g_{n+2})^{\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_2 g_1 g_{n+1} & = & g_1 g_{n+1} g_2 g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_2 c^e g_{n+2}^{\alpha_{1,2}} g_{n+1} & = & g_1 g_2 g_{n+1} g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha_{2,n+1}+\alpha'_{1,2}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_2 g_{n+1}^{e+1} g_{n+2}^{\alpha_{1,2}} & = & g_1 g_k g_{n+1}^{e+1} g_{n+2}^{\alpha_{2,n+1}+\alpha'_{1,2}} \\ & & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,2} = \alpha_{1,2} - \alpha_{2,n+1}} & & \end{array}$$

und

$$\begin{array}{rlcl} & \Phi_1(g_{n+1})\Phi_1(g_1) & = & \Phi_1(g_1)\Phi_1(g_{n+1})\Phi_1(g_{n+2})^{\alpha'_{1,n+1}} \\ \Longleftrightarrow & g_{n+1} g_1 g_{n+1} & = & g_1 g_{n+1} g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{1,n+1}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} g_{n+1} & = & g_1 g_{n+1}^2 g_{n+2}^{\alpha'_{1,n+1}} \\ \Longleftrightarrow & g_1 g_{n+1}^2 g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} & = & g_1 g_{n+1}^2 g_{n+2}^{\alpha'_{1,n+1}} \\ & & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,n+1} = \alpha_{1,n+1}}. & & \end{array}$$

Sei nun $\Phi_2 = (\phi_2, 1)$

$$\begin{array}{rlcl} \Phi_2 : & g_2 & \mapsto & g_2 g_{n+1}, \\ & g_s & \mapsto & g_s, \ s \neq 2, \\ & g_{n+1} & \mapsto & g_{n+1}, \\ & g_{n+2} & \mapsto & g_{n+2}. \end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j, k \neq 2$ und $\alpha'_{1,n+1} = \alpha_{1,n+1}$.
Sei $3 \leq k \leq n$

$$\begin{array}{rlcl} & \Phi_2(g_k)\Phi_2(g_2) & = & \Phi_2(g_2)\Phi_2(g_k)\Phi_2(g_{n+2})^{\alpha'_{2,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_k g_2 g_{n+1} & = & g_2 g_{n+1} g_k g_{n+2}^{\alpha'_{2,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_2 g_k g_{n+2}^{\alpha_{2,k}} g_{n+1} & = & g_2 g_k g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{2,k}} \\ \Longleftrightarrow & g_2 g_k g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha_{2,k}} & = & g_2 g_k g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{2,k}} \\ & & & \\ \Longrightarrow & \underline{\alpha'_{2,k} = \alpha_{2,k}} & & \text{für} \quad 3 \leq k \leq n. \end{array}$$

Sei $j = 1$

$$\begin{array}{rlcl}
 & \Phi_2(g_2)\Phi_2(g_1) & = & \Phi_2(g_1)\Phi_2(g_2)\Phi_2(g_{n+1})^e\Phi_2(g_{n+2})^{\alpha'_{1,2}} \\
\Longleftrightarrow & g_2g_{n+1}g_1 & = & g_1g_2g_{n+1}g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\
\Longleftrightarrow & g_2g_1g_{n+1}g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} & = & g_1g_2g_{n+1}g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\
\Longleftrightarrow & g_1g_2g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}}g_{n+1}g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} & = & g_1g_2g_{n+1}g_{n+1}^e g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}} \\
\Longleftrightarrow & g_1g_2g_{n+1}^{e+1}g_{n+2}^{\alpha_{1,2}+\alpha_{1,n+1}} & = & g_1g_2g_{n+1}^{e+1}g_{n+2}^{\alpha'_{1,2}}
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\alpha'_{1,2} = \alpha_{1,2} + \alpha_{1,n+1}}$$

und

$$\begin{array}{rlcl}
 & \Phi_2(g_{n+1})\Phi_2(g_2) & = & \Phi_2(g_2)\Phi_2(g_{n+1})\Phi_2(g_{n+2})^{\alpha'_2} \\
\Longleftrightarrow & g_{n+1}g_2g_{n+1} & = & g_2g_{n+1}g_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{2,n+1}} \\
\Longleftrightarrow & g_2g_{n+1}g_{n+2}^{\alpha_{2,n+1}}g_{n+1} & = & g_2g_{n+1}^2g_{n+2}^{\alpha'_{2,n+1}} \\
\Longleftrightarrow & g_2g_{n+1}^2g_{n+2}^{\alpha_{2,n+1}} & = & g_2g_{n+1}^2g_{n+2}^{\alpha'_{2,n+1}}
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\alpha'_{2,n+1} = \alpha_{2,n+1}}.$$

Für $3 \leq i \leq n$ erhalten wir $\Phi_1 = (\phi_i, 1)$

$$\begin{array}{rlcl}
\Phi_i : & g_i & \mapsto & g_ig_{n+1}, \\
 & g_s & \mapsto & g_s,\ s \neq i, \\
 & g_{n+1} & \mapsto & g_{n+1}, \\
 & g_{n+2} & \mapsto & g_{n+2}.
\end{array}$$

Es gilt $\alpha'_{j,k} = \alpha_{j,k}$ für $j, k \neq i$ und $\alpha'_s = \alpha_s$ für $1 \leq s \leq 2$.
Sei $3 \leq i < k \leq n$

$$\begin{array}{rlcl}
 & \Phi_i(g_k)\Phi_i(g_i) & = & \Phi_i(g_i)\Phi_i(g_k)\Phi_i(g_{n+2})^{\alpha'_{i,k}} \\
\Longleftrightarrow & g_kg_ig_{n+1} & = & g_ig_{n+1}g_kg_{n+2}^{\alpha'_{i,k}} \\
\Longleftrightarrow & g_ig_kg_{n+2}^{\alpha_{i,k}}g_{n+1} & = & g_ig_kg_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{i,k}} \\
\Longleftrightarrow & g_ig_kg_{n+1}g_{n+2}^{\alpha_{i,k}} & = & g_ig_kg_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{i,k}}
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\alpha'_{i,k} = \alpha_{i,k}} \quad \text{für} \quad 3 \leq i < k \leq n.$$

Sei $3 \leq j < i \leq n$

$$\begin{array}{rlcl}
 & \Phi_i(g_i)\Phi_i(g_j) & = & \Phi_i(g_j)\Phi_i(g_i)\Phi_i(g_{n+2})^{\alpha'_{j,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_ig_{n+1}g_j & = & g_jg_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{j,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_ig_jg_{n+1} & = & g_jg_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{j,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_jg_ig_{n+2}^{\alpha_{j,i}}g_{n+1} & = & g_jg_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{j,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_jg_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha_{j,i}} & = & g_jg_ig_{n+1}g_{n+2}^{\alpha'_{j,i}}
\end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{\alpha'_{j,i} = \alpha_{j,i}} \quad \text{für} \quad 3 \leq j < i \leq n.$$

Sei $3 \leq i \leq n$ und $k = 1$

$$\begin{array}{rlcl}
 & \Phi_i(g_i)\Phi_i(g_1) & = & \Phi_i(g_1)\Phi_i(g_i)\Phi_i(g_{n+2})^{\alpha'_{1,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_i g_{n+1} g_1 & = & g_1 g_i g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{1,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_i g_1 g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha_{1,n+1}} & = & g_1 g_i g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{1,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_1 g_i g_{n+2}^{\alpha_{1,i}+\alpha_{1,n+1}} g_{n+1} & = & g_1 g_i g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{1,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_1 g_i g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha_{1,i}+\alpha_{1,n+1}} & = & g_1 g_i g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{1,i}} \\
\Longrightarrow & \underline{\alpha'_{1,i} = \alpha_{1,i} + \alpha_{1,n+1}} & \text{für} & 3 \leq i \leq n.
\end{array}$$

Sei $3 \leq i \leq n$ und $k = 2$

$$\begin{array}{rlcl}
 & \Phi_i(g_i)\Phi_i(g_2) & = & \Phi_i(g_2)\Phi_i(g_i)\Phi_i(g_{n+2})^{\alpha'_{2,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_i g_{n+1} g_2 & = & g_2 g_i g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{2,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_i g_2 g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha_{2,n+1}} & = & g_2 g_i g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{2,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_2 g_i g_{n+2}^{\alpha_{2,i}+\alpha_{2,n+1}} g_{n+1} & = & g_2 g_i g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{2,i}} \\
\Longleftrightarrow & g_2 g_i g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha_{2,i}+\alpha_{2,n+1}} & = & g_2 g_i g_{n+1} g_{n+2}^{\alpha'_{2,i}} \\
 & & & \\
\Longrightarrow & \underline{\alpha'_{2,i} = \alpha_{2,i} + \alpha_{2,n+1}} & \text{für} & 3 \leq i \leq n.
\end{array}$$

Dies führt zu folgendem Ergebnis. Sei

$$\alpha := (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \ldots, \alpha_{n-1,n}, \alpha_{1,n+1}, \alpha_{2,n+1})$$

der Vektor bestehend aus den Exponenten von g_{n+2} in den Kommutatorrelationen von g_i und g_j, also den Elementen $\alpha_{i,j} \in \mathbb{Z}$ für $1 \leq i < j \leq n$ und den Exponenten von g_{n+2} in den Kommutatorrelationen von g_{n+1} mit g_1 beziehungsweise g_2, also den Elementen $\alpha_{1,n+1} \in \mathbb{Z}$ beziehungsweise $\alpha_{2,n+1} \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{array}{rcl}
\alpha^{(\tau_1,1,1)} & = & (\alpha_{1,2} + e\alpha_{2,n+1}, \alpha_{1,k} + \alpha_{2,k}, \ldots, \alpha_{1,n+1} + \alpha_{2,n+1}, \alpha_{2,n+1}),\ \ 3 \leq k \leq n, \\
\alpha^{(\tau_1,1,-1)} & = & -\alpha^{(\tau_1,1,1)}, \\
\alpha^{(\tau_2,-1,1)} & = & (-\alpha_{1,2}, \alpha_{2,k}, \alpha_{1,k}, \ldots, -\alpha_{2,n+1}, -\alpha_{1,n+1}),\ \ 3 \leq k \leq n, \\
\alpha^{(\tau_2,-1,-1)} & = & -\alpha^{(\tau_2,-1,1)}, \\
\alpha^{(\tau_3,-1,1)} & = & (-\alpha_{1,2} + e\alpha_{1,n+1}, -\alpha_{1,k}, \ldots, \alpha_{1,n+1}, -\alpha_{2,n+1}),\ \ 3 \leq k \leq n, \\
\alpha^{(\tau_3,-1,-1)} & = & -\alpha^{(\tau_3,-1,1)}, \\
3 \leq i \leq n: & & \\
\alpha^{(\tau_{1i},1,1)} & = & (\alpha_{1,2} - \alpha_{2,i}, \alpha_{1,k} - \alpha_{ki}, \ldots \alpha_{1,s} + \alpha_{i,s} \ldots, \alpha_{1,n+1}, \alpha_{2,n+1}),\ \ 3 \leq k < i < s \leq n, \\
\alpha^{(\tau_{1i},1,-1)} & = & -\alpha^{(\tau_{1i},1,1)}, \\
\alpha^{(\tau_{2i},1,1)} & = & (\alpha_{1,2} + \alpha_{1,i}, \alpha_{2,k} - \alpha_{ki}, \ldots \alpha_{2,s} + \alpha_{i,s} \ldots, \alpha_{1,n+1}, \alpha_{2,n+1}),\ \ 3 \leq k < i < s \leq n, \\
\alpha^{(\tau_{2i},1,-1)} & = & -\alpha^{(\tau_{2i},1,1)}, \\
\alpha^{(\tau_A,1,1)} & = & (\alpha_{1,2}, \alpha_{j,3} + \alpha_{j,4}, \ldots \alpha_{3,k} + \alpha_{4,k} \ldots, \alpha_{1,n+1}, \alpha_{2,n+1}),\ \ 1 \leq j \leq 2, 5 \leq k \leq n, \\
\alpha^{(\tau_A,1,-1)} & = & -\alpha^{(\tau_A,1,1)}, \\
\alpha^{(\tau_B,1,1)} & = & (\alpha_{1,2}, \alpha_{j,4}, \alpha_{j,3}, -\alpha_{3,4} \ldots \alpha_{4,k}, \alpha_{3,k} \ldots, \alpha_{1,n+1}, \alpha_{2,n+1}),\ \ 1 \leq j \leq 2, 5 \leq k \leq n, \\
\alpha^{(\tau_B,1,-1)} & = & -\alpha^{(\tau_B,1,1)}, \\
\alpha^{(\tau_C,1,1)} & = & (\alpha_{1,2}, -\alpha_{j,3}, \cdots - \alpha_{3,k}, \ldots, \alpha_{1,n+1}, \alpha_{2,n+1}),\ \ 1 \leq j \leq 2, 4 \leq k \leq n,
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcl}
\alpha^{(\tau_C,1,-1)} & = & -\alpha^{(\tau_C,1,1)}, \\
\alpha^{(\tau_D,1,1)} & = & (\alpha_{1,2}, \alpha_{j,k+1}, \alpha_{s+1,t+1}, \dots \alpha_{j,3}, \dots, -\alpha_{3,k+1}, \dots, \alpha_{1,n+1}, \alpha_{2,n+1}), \\
 & & 1 \leq j \leq 2, 3 \leq k \leq n-1, 3 \leq s < t \leq n-1, \\
\alpha^{(\tau_D,1,-1)} & = & -\alpha^{(\tau_D,1,1)}, \\
\alpha^{(\phi_1,1)} & = & (\alpha_{1,2} - \alpha_{2,n+1}, \dots), \\
\alpha^{(\phi_1,-1)} & = & -\alpha^{(\phi_1,1)}, \\
\alpha^{(\phi_2,1)} & = & (\alpha_{1,2} + \alpha_{1,n+1}, \dots), \\
\alpha^{(\phi_2,-1)} & = & -\alpha^{(\phi_2,1)}, \\
3 \leq i \leq n: & & \\
\alpha^{(\phi_i,1)} & = & (\alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,i} + \alpha_{1,n+1}, \alpha_{2,i} + \alpha_{2,n+1}, \dots), \\
\alpha^{(\phi_i,-1)} & = & -\alpha^{(\phi_i,1)}.
\end{array}$$

8.4 Beispiele

Im diesem Abschnitt betrachten wir die im letzten Abschnitt beschriebene Reduktion in den konkreten Fällen $n = 4$ und $n = 5$.

8.4.1 $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (4,1,1)

Sei im Folgenden $n = 4$, dann ist der Vektor α von der Form

$$\alpha = (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}).$$

Zur Erinnerung, zusammen mit einer natürlichen Zahl e beschreibt dieser Vektor eine induzierte $\mathcal{T}$-Präsentation $P(\alpha)$ einer $\mathcal{T}$-Gruppe. Die nicht-trivialen Relationen sind gegeben durch

$$\begin{array}{rcl}
g_2 g_1 & = & g_1 g_2 g_5^e g_6^{\alpha_{1,2}}, \\
g_3 g_1 & = & g_1 g_3 g_6^{\alpha_{1,3}}, \\
g_3 g_2 & = & g_2 g_3 g_6^{\alpha_{2,3}}, \\
g_4 g_1 & = & g_1 g_4 g_6^{\alpha_{1,4}}, \\
g_4 g_2 & = & g_2 g_4 g_6^{\alpha_{2,4}}, \\
g_4 g_3 & = & g_3 g_4 g_6^{\alpha_{3,4}}, \\
g_5 g_1 & = & g_1 g_5 g_6^{\alpha_{1,5}}, \\
g_5 g_2 & = & g_2 g_5 g_6^{\alpha_{2,5}}.
\end{array}$$

Im letzten Abschnitt haben wir die Operationen für einen solchen Vektor α allgemein beschrieben. Für $n = 4$ fassen wir diese in folgender Bemerkung zusammen. Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir jede Operation nur einmal. Ein Vorzeichenwechsel in der letzten Komponente liefert den erreichten Vektor mit -1 multipliziert.

Bemerkung 8.4.1
Der Vektor α kann wie folgt geändert werden

$$\alpha^{(\tau_1,1,1)} = (\alpha_{1,2} + e\alpha_{2,5}, \alpha_{1,3} + \alpha_{2,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4} + \alpha_{2,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5} + \alpha_{2,5}, \alpha_{2,5}),$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^{(\tau_2,-1,-1)} &= (\alpha_{1,2}, -\alpha_{2,3}, -\alpha_{1,3}, -\alpha_{2,4}, -\alpha_{1,4}, -\alpha_{3,4}, \alpha_{2,5}, \alpha_{1,5}),\\
\alpha^{(\tau_3,-1,-1)} &= (\alpha_{1,2} - e\alpha_{1,5}, \alpha_{1,3}, -\alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, -\alpha_{2,4}, -\alpha_{3,4}, -\alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^{(\tau_A,1,1)} &= (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3} + \alpha_{1,4}, \alpha_{2,3} + \alpha_{2,4}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),\\
\alpha^{(\tau_B,1,1)} &= (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, -\alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),\\
\alpha^{(\tau_C,1,1)} &= (\alpha_{1,2}, -\alpha_{1,3}, -\alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, -\alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^{(\tau_{13},1,1)} &= (\alpha_{1,2} - \alpha_{2,3}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4} + \alpha_{3,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),\\
\alpha^{(\tau_{14},1,1)} &= (\alpha_{1,2} - \alpha_{22}, \alpha_{1,3} - \alpha_{3,4}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),\\
\alpha^{(\tau_{23},1,1)} &= (\alpha_{1,2} + \alpha_{1,3}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4} + \alpha_{3,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),\\
\alpha^{(\tau_{24},1,1)} &= (\alpha_{1,2} + \alpha_{1,4}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3} - \alpha_{3,4}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^{(\phi_1,1)} &= (\alpha_{1,2} - \alpha_{2,5}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),\\
\alpha^{(\phi_2,1)} &= (\alpha_{1,2} + \alpha_{1,5}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),\\
\alpha^{(\phi_3,1)} &= (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3} + \alpha_{1,5}, \alpha_{2,3} + \alpha_{2,5}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}),\\
\alpha^{(\phi_4,1)} &= (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4} + \alpha_{1,5}, \alpha_{2,4} + \alpha_{2,5}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}).
\end{aligned}
$$

Mit diesen Operationen kann man eine Präsentation, die durch solch einen Vektor α gegeben ist, deutlich vereinfachen, wie man an folgendem Satz sieht.

Satz 8.4.2
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(4,1,1)$. Dann besitzt G eine $\mathcal{T}$-Präsentation, die durch eine natürliche Zahl e und den Vektor $\beta = (\beta_{1,2}, 0, \beta_{2,3}, \beta_{1,4}, \beta_{2,4}, \beta_{3,4}, \beta_{1,5}, 0)$ mit folgenden Eigenschaften beschrieben wird. Für $g = \mathrm{ggT}(e, \beta_{1,5}, \beta_{2,3}, \beta_{2,4}, \beta_{1,4})$ gilt

$$
\begin{aligned}
\beta_{1,2} &\in \{0, \ldots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor\},\\
\beta_{1,4} &\in \{0, \ldots, \lfloor \frac{\beta_1}{2} \rfloor\},\\
\beta_{3,4} &\geq 0,\\
\beta_{2,4} &\geq 0,\\
\beta_{2,3} &\in \mathbb{Z},\\
\beta_{1,5} &> 0 \textit{ und}\\
\beta_{3,4} &\neq 0 \Longrightarrow \beta_{2,4} \leq \lfloor \frac{\beta_{3,4}}{2} \rfloor,\\
\beta_{1,4} &= 0 \Longrightarrow \beta_{2,3} = 0.
\end{aligned}
$$

Beweis:
Der Typ impliziert, dass eine der beiden letzten Komponenten des Vektors β von Null verschieden ist. Damit kann man durch eine wiederholte Anwendung von $(\tau_1, 1, 1), (\tau_2, -1, -1)$ und $(\tau_3, -1, -1)$ die gewünschte Form für die letzten beiden Komponenten erreichen. Hierbei wird $\beta_{1,5}$ zum ggT der Ausgangswerte. Analog dazu erhält man die Null in der zweiten Komponente durch wiederholte Anwendung von $(\tau_A, 1, 1), (\tau_B, 1, 1)$ und $(\tau_C, 1, 1)$.
Damit erhält man einen Vektor der geforderten Form. Betrachten wir nun die geforderten Eigenschaften des Vektors. Das Element $\beta_{1,2}$ liegt in $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. Die erste Komponente von β kann mit Hilfe von $(\tau_{13}, 1, 1)$, $(\tau_{14}, 1, 1)$, $(\tau_{24}, 1, 1)$ und $(\phi_2, 1)$ reduziert werden. Dabei können die nötigen Vor-

zeichenwechsel durch Anwendung von $(\tau_2, -1, -1)$, $(\tau_3, -1, -1)$, $(\tau_B, 1, 1)$ und $(\tau_C, 1, 1)$ erreicht werden. Im Anschluss kann gegebenenfalls noch einmal die zuvor genutzte Sequenz angewandt werden, um die zweite Komponente wieder auf Null zu setzen.
Da $\beta_{1,5}$ positiv und von Null verschieden ist, erhalten wir durch wiederholte Anwendung von $(\phi_4, 1)$ die gewünschte Form von $\beta_{1,4}$. Das geforderte positive Vorzeichen liefert gegebenenfalls die Anwendung von $(\tau_2, -1, -1)$ und $(\tau_3, -1, -1)$.
Mit Hilfe von $(\tau_C, 1, 1)$ beziehungsweise $(\tau_B, 1, 1)$ und $(\tau_C, 1, 1)$ erreichen wir positive Werte für $\beta_{3,4}$ beziehungsweise $\beta_{2,4}$. Falls $\beta_{3,4}$ von Null verschieden ist, liefern $(\tau_C, 1, 1)$ und $(\tau_{23}, 1, 1)$ die Reduktion $\beta_{2,4} \leq \lfloor \frac{\beta_{3,4}}{2} \rfloor$.
An $\beta_{2,3}$ werden im Allgemeinen keine speziellen Anforderungen gestellt. Sollte der Fall $\beta_{1,4} = 0$ eintreten, kann man für $\beta_{2,3}$ genau wie bei der zweiten Komponente durch wiederholte Anwendung von $(\tau_A, 1, 1)$, $(\tau_B, 1, 1)$ und $(\tau_C, 1, 1)$ den Wert Null erreichen. □

Wenn ein solcher Vektor β aus einem Vektor α durch diese Operationen hervorgeht, nennen wir ihn **reduzierte Form** von α. Man sollte beachten, dass ein solcher Vektor β zwar deutlich vereinfacht aber nicht zwangsweise maximal reduziert ist. Ein interessanter Spezialfall in dem der Vektor aus Satz 8.4.2 nicht weiter reduziert werden kann ist der Folgende.

Korollar 8.4.3
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(4,1,1)$. Dann hat G eine $\mathcal{T}$-Präsentation, die durch eine natürliche Zahl e und einen Vektor $\alpha = (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5})$ beschrieben wird. Sei zusätzlich $\mathrm{ggT}(\alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}) = 1$. Dann erhält man als reduzierte Form von α einen Vektor $\beta = (0,0,0,0,\beta_{2,4},\beta_{3,4},1,0)$ mit $\beta_{3,4} = |\alpha_{3,4}|$ und $\beta_{2,4} \geq 0$. Im Fall $\beta_{3,4} \neq 0$ gilt zusätzlich $\beta_{2,4} < \beta_{3,4}$.

Betrachten wir nun ein Beispiel für die Reduktion einer Präsentation mit den in Bemerkung 8.4.1 beschriebenen Operationen.

Beispiel 8.4.4
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(4,1,1)$. Dann hat G eine $\mathcal{T}$-Präsentation in Erzeugern $g_1, \ldots, g_6$. Seien deren nicht-triviale Relationen beschrieben durch

$$\begin{aligned}
g_2 g_1 &= g_1 g_2 g_5^5 g_6^3, \\
g_3 g_1 &= g_1 g_3 g_6^{47}, \\
g_3 g_2 &= g_2 g_3 g_6^{-76}, \\
g_4 g_1 &= g_1 g_4 g_6^{74}, \\
g_4 g_2 &= g_2 g_4 g_6^{-120}, \\
g_4 g_3 &= g_3 g_4 g_6^{-12}, \\
g_5 g_1 &= g_1 g_5 g_6^{-2}, \\
g_5 g_2 &= g_2 g_5 g_6^{3}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir $e = 5$ und $\alpha = (3, 47, -76, 74, -120, -12, -2, 3)$. Mit der Eigenschaft $\alpha_{1,2} \in \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ führt dies zu folgender Kette von Reduktionen

$$\begin{aligned}
& (3, 47, -76, 74, -120, -12, -2, 3) \\
\xrightarrow{\tau_1} \; & (3, -29, -76, -46, -120, -12, 1, 3) \xrightarrow{\tau_2} (3, 76, 29, 120, 46, 12, 3, 1) \\
\xrightarrow{\tau_3} \; & (3, 76, -29, 120, -46, -12, -3, 1) \xrightarrow{\tau_1} (3, 47, -29, 74, -46, -12, -2, 1) \\
\xrightarrow{\tau_1} \; & (3, 18, -29, 28, -46, -12, -1, 1) \xrightarrow{\tau_1} (3, -11, -29, -18, -46, -12, 0, 1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\xrightarrow{\tau_2} (3,29,11,46,18,12,1,0) \xrightarrow{\tau_C} (3,-29,-11,46,18,-12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_A} (3,17,7,46,18,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_B} (3,46,18,17,7,12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_C} (3,-46,-18,17,7,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (3,-29,-11,17,7,-12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_A} (3,-12,-4,17,7,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (3,5,3,17,7,-12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_B} (3,17,7,5,3,12,1,0) \xrightarrow{\tau_C} (3,-17,-7,5,3,-12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_A} (3,-12,-4,5,3,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (3,-7,-1,5,3,-1,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_A} (3,-2,2,5,3,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_B} (3,5,3,-2,2,12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_A} (3,3,5,-2,2,12,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (3,1,7,-2,2,12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_B} (3,-2,2,1,7,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (3,-1,9,1,7,-12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_A} (3,0,16,1,7,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_B} (3,1,7,0,16,12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_C} (3,-1,-7,0,16,-12,1,0) \xrightarrow{\phi_3} (3,0,-7,0,16,-12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_B} (3,0,16,0,-7,12,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (3,0,9,0,-7,12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_A} (3,0,2,0,-7,12,1,0) \xrightarrow{\tau_B} (3,0,-7,0,2,-12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_A} (3,0,-5,0,2,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (3,0,-3,0,2,-12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_A} (3,0,-1,0,2,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_B} (3,0,2,0,-1,12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_A} (3,0,1,0,-1,12,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (3,0,0,0,-1,12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_B} (3,0,-1,0,0,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_C} (3,0,1,0,0,12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_B} (3,0,0,0,1,-12,1,0) \xrightarrow{\tau_3} (3,0,0,0,-1,12,-1,0)\\
&\xrightarrow{\phi_2} (2,0,0,0,-1,12,-1,0) \xrightarrow{\phi_2} (1,0,0,0,-1,12,-1,0)\\
&\xrightarrow{\phi_2} (0,0,0,0,-1,12,1,0) \xrightarrow{\tau_3} (0,0,0,0,1,-12,1,0)\\
&\xrightarrow{\tau_C} (0,0,0,0,1,12,1,0).
\end{aligned}
$$

Das bedeutet, G besitzt eine $\mathcal{T}$-Präsentation, deren nicht-triviale Relationen beschrieben sind durch

$$
\begin{aligned}
g_2g_1 &= g_1g_2g_5^5,\\
g_4g_2 &= g_2g_4g_6,\\
g_4g_3 &= g_3g_4g_6^{12},\\
g_5g_1 &= g_1g_5g_6.
\end{aligned}
$$

8.4.2 $\mathcal{T}$-Gruppen vom Typ (5,1,1)

Sei im Folgenden $n = 5$, dann ist der Vektor α von der Form

$$\alpha = (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}).$$

Zur Erinnerung, zusammen mit einer natürlichen Zahl e beschreibt dieser Vektor eine induzierte $\mathcal{T}$-Präsentation einer $\mathcal{T}$-Gruppe. Die nicht-trivialen Relationen sind gegeben durch

$$
\begin{aligned}
g_2g_1 &= g_1g_2g_6^e g_7^{\alpha_{1,2}},\\
g_3g_1 &= g_1g_3g_7^{\alpha_{1,3}},\\
g_3g_2 &= g_2g_3g_7^{\alpha_{2,3}},\\
g_4g_1 &= g_1g_4g_7^{\alpha_{1,4}},\\
g_4g_2 &= g_2g_4g_7^{\alpha_{2,4}},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
g_4g_3 &= g_3g_4g_7^{\alpha_{3,4}},\\
g_4g_3 &= g_3g_4g_7^{\alpha_{1,5}},\\
g_4g_3 &= g_3g_4g_7^{\alpha_{2,5}},\\
g_4g_3 &= g_3g_4g_7^{\alpha_{3,5}},\\
g_4g_3 &= g_3g_4g_7^{\alpha_{4,5}},\\
g_5g_1 &= g_1g_5g_7^{\alpha_{1,6}},\\
g_5g_2 &= g_2g_5g_7^{\alpha_{2,6}}.
\end{aligned}$$

In Abschnitt 8.3 haben wir die Operationen für einen solchen Vektor α allgemein beschrieben. Für $n = 5$ fassen wir diese in folgender Bemerkung zusammen. Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir jede Operation nur einmal. Ein Vorzeichenwechsel in der letzten Komponente liefert den erreichten Vektor mit -1 multipliziert.

Bemerkung 8.4.5
Der Vektor α kann wie folgt geändert werden Wir erhalten folgende Operationen

$$\begin{aligned}
\alpha^{(\tau_1,1,1)} &= (\alpha_{1,2}+e\alpha_{2,6}, \alpha_{1,3}+\alpha_{2,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}+\alpha_{2,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}+\alpha_{2,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5},\\
&\quad \alpha_{1,6}+\alpha_{2,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\tau_2,-1,-1)} &= (\alpha_{1,2}, -\alpha_{2,3}, -\alpha_{1,3}, -\alpha_{2,4}, -\alpha_{1,4}, -\alpha_{3,4}, -\alpha_{2,5}, -\alpha_{1,5}, -\alpha_{3,5}, -\alpha_{4,5}\ \alpha_{2,6}, \alpha_{1,6}),\\
\alpha^{(\tau_3,-1,-1)} &= (\alpha_{1,2}-e\alpha_{1,6}, \alpha_{1,3}, -\alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, -\alpha_{2,4}, -\alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, -\alpha_{2,5}, -\alpha_{3,5}, -\alpha_{4,5}, -\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\\
\alpha^{(\tau_A,1,1)} &= (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}+\alpha_{1,4}, \alpha_{2,3}+\alpha_{2,4}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}+\alpha_{4,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\tau_B,1,1)} &= (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, -\alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\tau_C,1,1)} &= (\alpha_{1,2}, -\alpha_{1,3}, -\alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, -\alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, -\alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\tau_D,1,1)} &= (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, -\alpha_{3,4}, -\alpha_{3,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\\
\alpha^{(\tau_{13},1,1)} &= (\alpha_{1,2}-\alpha_{2,3}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}+\alpha_{3,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}+\alpha_{3,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\tau_{14},1,1)} &= (\alpha_{1,2}-\alpha_{2,4}, \alpha_{1,3}-\alpha_{3,4}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}+\alpha_{4,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\tau_{15},1,1)} &= (\alpha_{1,2}-\alpha_{2,5}, \alpha_{1,3}-\alpha_{3,5}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}-\alpha_{4,5}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\tau_{23},1,1)} &= (\alpha_{1,2}+\alpha_{1,3}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}+\alpha_{3,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}+\alpha_{3,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\tau_{24},1,1)} &= (\alpha_{1,2}+\alpha_{1,4}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}-\alpha_{3,4}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}+\alpha_{4,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\tau_{25},1,1)} &= (\alpha_{1,2}+\alpha_{1,5}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}-\alpha_{3,5}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}-\alpha_{4,5}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\\
\alpha^{(\phi_1,1)} &= (\alpha_{1,2}-\alpha_{2,6}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\phi_2,1)} &= (\alpha_{1,2}+\alpha_{1,6}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\phi_3,1)} &= (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}+\alpha_{1,6}, \alpha_{2,3}+\alpha_{2,6}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\phi_4,1)} &= (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}+\alpha_{1,6}, \alpha_{2,4}+\alpha_{2,6}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}),\\
\alpha^{(\phi_5,1)} &= (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}+\alpha_{1,6}, \alpha_{2,5}+\alpha_{2,6}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}, \alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}).
\end{aligned}$$

Mit diesen Operationen kann man eine Präsentation die durch solch einen Vektor α gegeben ist deutlich vereinfachen.

Satz 8.4.6
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(5,1,1)$. Dann besitzt G eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation, die durch eine natürliche Zahl e und den Vektor $\beta = (\beta_{1,2}, 0, 0, 0, \beta_{2,4}, \beta_{3,4}, \beta_{1,5}, \beta_{2,5}, \beta_{3,5}, \beta_{4,5}, \beta_{1,6}, 0)$ mit

folgenden Eigenschaften beschrieben wird. Für $g = \mathrm{ggT}(e, \beta_{1,6}, \beta_{2,4}, \beta_{2,5}, \beta_{1,5})$ *gilt*

$$
\begin{aligned}
\beta_{1,2} &\in \{0, \dots, \lfloor \frac{g}{2} \rfloor\},\\
\beta_{1,5} &\in \{0, \dots, \lfloor \frac{\beta_1}{2} \rfloor\},\\
\beta_{3,4} &\geq 0,\\
\beta_{2,4} &\geq 0,\\
\beta_{2,5} &\in \mathbb{Z},\\
\beta_{3,5} &\in \mathbb{Z},\\
\beta_{4,5} &\in \mathbb{Z},\\
\beta_{1,6} &> 0 \textit{ und}\\
\beta_{3,4} &\neq 0 \Longrightarrow \beta_{2,4} \leq \lfloor \frac{\beta_{34}}{2} \rfloor,\\
\beta_{1,5} &= 0 \Longrightarrow \beta_{24} = 0 \Longrightarrow \beta_{35} = 0.
\end{aligned}
$$

Beweis:
Der Typ impliziert, dass eine der beiden letzten Komponenten des Vektors β von Null verschieden ist. Damit kann man durch eine wiederholte Anwendung von $(\tau_1, 1, 1), (\tau_2, -1, -1)$ und $(\tau_3, -1, -1)$ die gewünschte Form für die letzten beiden Komponenten erreichen. Hierbei wird $\beta_{1,6}$ zum ggT der Ausgangswerte. Analog dazu erhält man die Null in der zweiten, dritten und vierten Komponente durch wiederholte Anwendung von $(\tau_A, 1, 1), (\tau_B, 1, 1)$ und $(\tau_C, 1, 1)$, wenn man durch Anwendung von $(\tau_D, 1, 1)$ die Paare passend verschiebt.
Damit erhält man einen Vektor der geforderten Form. Betrachten wir nun die geforderten Eigenschaften des Vektors. Das Element $\beta_{1,2}$ liegt in $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$. Die erste Komponente von β kann mit Hilfe von $(\tau_{15}, 1, 1)$, $(\tau_{15}, 1, 1)$, $(\tau_{25}, 1, 1)$ und $(\phi_2, 1)$ reduziert werden. Dabei können die nötigen Vorzeichenwechsel durch Anwendung von $(\tau_2, -1, -1)$, $(\tau_3, -1, -1)$, $(\tau_B, 1, 1)$ und $(\tau_C, 1, 1)$ erreicht werden. Im Anschluss kann gegebenenfalls noch einmal die zuvor genutzte Sequenz angewandt werden, um die zweite, dritte und vierte Komponente wieder auf Null zu setzen.
Da $\beta_{1,6}$ positiv und von Null verschieden ist, erhalten wir durch wiederholte Anwendung von $(\phi_5, 1)$ die gewünschte Form von $\beta_{1,5}$. Das geforderte positive Vorzeichen liefert gegebenenfalls die Anwendung von $(\tau_2, -1, -1)$ und $(\tau_3, -1, -1)$.
Mit Hilfe von $(\tau_C, 1, 1)$ beziehungsweise $(\tau_B, 1, 1)$ und $(\tau_C, 1, 1)$ erreichen wir positive Werte für $\beta_{3,4}$ beziehungsweise $\beta_{2,4}$. Falls $\beta_{3,4}$ von Null verschieden ist, liefern $(\tau_C, 1, 1)$ und $(\tau_{2,3}, 1, 1)$ die Reduktion $\beta_{2,4} \leq \lfloor \frac{\beta_{3,4}}{2} \rfloor$.
Sollte der Fall $\beta_{1,5} = 0$ eintreten, kann man für $\beta_{2,4}$ und $\beta_{3,5}$ genau wie bei der zweiten, dritten und vierten Komponente nach Vertauschung durch $(\tau_D, 1, 1)$ durch wiederholte Anwendung von $(\tau_A, 1, 1)$, $(\tau_B, 1, 1)$ und $(\tau_C, 1, 1)$ den Wert Null erreichen. □

Wenn ein solcher Vektor β aus einem Vektor α durch diese Operationen hervorgeht, nennen wir ihn **reduzierte Form** von α. Man sollte beachten, dass ein solcher Vektor β zwar deutlich vereinfacht aber nicht maximal reduziert ist. Ein interessanter Spezialfall in dem der Vektor aus Satz 8.4.6 nicht weiter reduziert werden kann ist der Folgende.

Korollar 8.4.7
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(5, 1, 1)$. *Dann hat G eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation, die durch eine Zahl $e \in \mathbb{N}$ und einen Vektor* $\alpha = (\alpha_{1,2}, \alpha_{1,3}, \alpha_{2,3}, \alpha_{1,4}, \alpha_{2,4}, \alpha_{3,4}, \alpha_{1,5}, \alpha_{2,5}, \alpha_{3,5}, \alpha_{4,5}\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6})$ *beschrieben wird. Sei zusätzlich* $\mathrm{ggT}(\alpha_{1,6}, \alpha_{2,6}) = 1$. *Dann erhält man als reduzierte Form von α einen Vektor* $\beta = (0, 0, 0, 0, 0, \beta_{3,4}, 0, \beta_{2,5}, 0, \beta_{4,5}, 1, 0)$ *mit* $\beta_{3,4} \geq 0$ *und* $\beta_{2,5} \geq 0$.

Betrachten wir nun ein Beispiel für die Reduktion einer Präsentation mit den in Bemerkung 8.4.5 beschriebenen Operationen.

Beispiel 8.4.8
Sei G eine $\mathcal{T}$-Gruppe vom Typ $(5,1,1)$. Dann hat G eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation in Erzeugern $g_1,\ldots,g_7$. Seien deren nicht-triviale Relationen beschrieben durch

$$\begin{array}{rcl}
g_2g_1 &=& g_1g_2g_6^3g_7^2,\\
g_3g_1 &=& g_1g_3g_7^{-1},\\
g_3g_2 &=& g_2g_3g_7^5,\\
g_4g_1 &=& g_1g_4g_7^2,\\
g_4g_2 &=& g_2g_4g_7^3,\\
g_4g_3 &=& g_3g_4g_7^{-2},\\
g_5g_1 &=& g_1g_5g_7^1,\\
g_5g_2 &=& g_2g_5g_7^2,\\
g_5g_3 &=& g_3g_5g_7^{-2},\\
g_4g_4 &=& g_4g_5g_7^3,\\
g_6g_1 &=& g_1g_6g_7^{-1},\\
g_6g_2 &=& g_2g_6g_7^2.
\end{array}$$

Damit erhalten wir $e=3$ und $\alpha=(2,-1,5,2,3,-2,1,2,-2,3,-1,2)$. Mit der Eigenschaft $\alpha_{1,2}\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ führt dies zu folgender Kette von Reduktionen

$$\begin{array}{rl}
& (2,-1,5,2,3,-2,1,2,-2,3,-1,2)\\
\xrightarrow{\tau_2} & (2,-5,1,-3,-2,2,2,1,2,-3,2,-1) \xrightarrow{\tau_1} (2,-4,1,-5,-2,2,3,1,2,-3,1,-1)\\
\xrightarrow{\tau_1} & (2,-3,1,-7,-2,2,4,1,2,-3,0,-1) \xrightarrow{\tau_2} (2,-1,3,2,7,-2,-1,-4,-2,3,-1,0)\\
\xrightarrow{\phi_2} & (1,-1,3,2,7,-2,-1,-4,-2,3,-1,0) \xrightarrow{\phi_2} (0,-1,3,2,7,-2,-1,-4,-2,3,-1,0)\\
\xrightarrow{\phi_4} & (0,-1,3,1,7,-2,-1,-4,-2,3,-1,0) \xrightarrow{\phi_4} (0,-1,3,0,7,-2,-1,-4,-2,3,-1,0)\\
\xrightarrow{\tau_3} & (0,-1,-3,0,-7,2,-1,4,2,-3,1,0) \xrightarrow{\phi_3} (0,0,-3,0,-7,2,-1,4,2,-3,1,0)\\
\xrightarrow{\phi_5} & (0,0,-3,0,-7,2,0,4,2,-3,1,0) \xrightarrow{\tau_C} (0,0,3,0,-7,-2,0,4,-2,-3,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_B} & (0,0,-7,0,3,2,0,4,-3,-2,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (0,0,-4,0,3,2,0,4,-5,-2,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_A} & (0,0,-1,0,3,2,0,4,-7,-2,1,0) \xrightarrow{\tau_B} (0,0,3,0,-1,-2,0,4,-2,-7,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_A} & (0,0,2,0,-1,-2,0,4,-9,-7,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (0,0,1,0,-1,-2,0,4,-16,-7,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_A} & (0,0,0,0,-1,-2,0,4,-23,-7,1,0) \xrightarrow{\tau_D} (0,0,-1,0,4,-7,0,0,2,23,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_B} & (0,0,4,0,-1,7,0,0,23,2,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (0,0,3,0,-1,7,0,0,25,2,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_A} & (0,0,2,0,-1,7,0,0,27,2,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (0,0,1,0,-1,7,0,0,29,2,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_A} & (0,0,0,0,-1,7,0,0,31,2,1,0) \xrightarrow{\tau_D} (0,0,-1,0,0,2,0,0,-7,-31,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_C} & (0,0,1,0,0,-2,0,0,7,-31,1,0) \xrightarrow{\tau_D} (0,0,0,0,0,-31,0,1,2,-7,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_B} & (0,0,0,0,0,31,0,1,-7,2,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (0,0,0,0,0,31,0,1,-5,2,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_A} & (0,0,0,0,0,31,0,1,-3,2,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (0,0,0,0,0,31,0,1,-1,2,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_B} & (0,0,0,0,0,-31,0,1,2,-1,1,0) \xrightarrow{\tau_A} (0,0,0,0,0,-31,0,1,1,-1,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_A} & (0,0,0,0,0,-31,0,1,0,-1,1,0) \xrightarrow{\tau_D} (0,0,0,1,0,-1,0,0,31,0,1,0)\\
\xrightarrow{\tau_C} & (0,0,0,1,0,1,0,0,-31,0,1,0) \xrightarrow{\tau_D} (0,0,1,0,0,0,0,0,-1,31,1,0)
\end{array}$$

$$\xrightarrow{\tau_D} \quad (0,0,0,0,0,31,0,1,0,1,1,0).$$

Das bedeutet G besitzt eine konsistente $\mathcal{T}$-Präsentation, deren nicht-triviale Relationen beschrieben sind durch

$$\begin{aligned}
g_2 g_1 &= g_1 g_2 g_6^3, \\
g_4 g_3 &= g_3 g_4 g_7^{31}, \\
g_5 g_2 &= g_2 g_5 g_7, \\
g_5 g_4 &= g_4 g_5 g_7, \\
g_5 g_1 &= g_1 g_5 g_7.
\end{aligned}$$

Zusammenfassung

Gruppen können mit Hilfe von Präsentationen dargestellt werden. Die Frage, ob zwei Präsentationen isomorphe Gruppen beschreiben oder nicht, wird auch als das **Isomorphieproblem** bezeichnet und wurde 1911 von Dehn formuliert. Es ist bekannt, dass das Isomorphieproblem im Allgemeinen nicht entscheidbar ist, siehe auch [1, Kap.3]. Für endlich erzeugte, torsionsfreie, nilpotente Gruppen, so genannte $\mathcal{T}$-Gruppen, ist dies anders. Grunewald & Segal [8, 9] haben 1980 gezeigt, dass das Isomorphieproblem für $\mathcal{T}$-Gruppen entscheidbar ist. Allerdings scheint es schwierig, den von Grunewald & Segal beschriebenen Algorithmus in die Praxis umzusetzen, selbst in sehr kleinen Fällen. Vergleiche dazu auch die Arbeit von de Graaf & Pavan von 2009 [2].

Einen praktikablen Algorithmus zur Lösung des Isomorphieproblems für gewisse $\mathcal{T}$-Gruppen der Nilpotenzklasse 2, darunter diejenigen der Hirschlänge höchstens 5, liefert eine Arbeit von Grunewald & Scharlau [10] aus dem Jahr 1979. Für $\mathcal{T}$-Gruppen mit einer höheren Nilpotenzklasse ist keine allgemeine, praktikable Methode zur Lösung des Isomorphieproblems bekannt.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Entwicklung einer solchen Methode für die $\mathcal{T}$-Gruppen der Hirschlänge höchstens 5 und der Nilpotenzklasse mindestens 3. Dabei erhält man für jede dieser Gruppen eine **kanonische Form**. Das bedeutet, wir geben für diese Gruppe eine Präsentation an, die für den jeweiligen Isomorphietyp eindeutig ist. Insbesondere werden die $\mathcal{T}$-Gruppen der Hirschlänge höchstens 5 und der Nilpotenzklasse 3 bis auf Isomorphie klassifiziert.

Zuerst definieren wir eine Invariante für $\mathcal{T}$-Gruppen, die uns deren Untersuchung erleichtert. Dieser sogenannte Typ einer $\mathcal{T}$-Gruppe gibt Aufschluss über ihre innere Struktur und wird folgendermaßen beschrieben. Für eine $\mathcal{T}$-Gruppe G der Nilpotenzklasse c sei $G = \gamma_1(G) > \cdots > \gamma_c(G) > \gamma_{c+1}(G) = \{1\}$ deren absteigende Zentralreihe. Weiter sei $I_k(G)/\gamma_k(G)$ die Torsionsuntergruppe von $G/\gamma_k(G)$ für $1 \leq k \leq c+1$. Dann heißt

$$G = I_1(G) > I_2(G) > \cdots > I_c(G) > I_{c+1}(G) = \{1\}$$

die Isolatorreihe von G. Dies ist eine vollständig invariante Zentralreihe von G mit frei abelschen Quotienten $I_k(G)/I_{k+1}(G) \cong \mathbb{Z}^{d_k}$ für $1 \leq k \leq c$. Wir bezeichnen $(d_1, \cdots, d_c)$ als den Typ von G.

Als nächstes definieren wir eine Präsentation durch die jede $\mathcal{T}$-Gruppe beschrieben werden kann. Dazu betrachten wir einen Vektor $t = (t_{i,j,k} \mid 1 \leq i < j < k \leq n) \in \mathbb{Z}^{\binom{n}{3}}$ und eine durch diesen Vektor t beschriebene Präsentation

$$G(t) = \langle g_1, \ldots, g_n \mid [g_j, g_i] = g_{j+1}^{t_{i,j,j+1}} \cdots g_n^{t_{i,j,n}} \text{ für } 1 \leq i < j \leq n \rangle.$$

Zu jeder $\mathcal{T}$-Gruppe G der Hirschlänge n gibt es einen solchen Vektor t für den $G \cong G(t)$ gilt.

Sei nun G eine $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge $n \leq 5$ und der Nilpotenzklasse mindestens 3. Weiter sei $T(G) = \{t \in \mathbb{Z}^{\binom{n}{3}} \mid G \cong G(t)\}$. Damit beschreibt $T(G)$ den Isomorphietyp von G vollständig. In dieser Arbeit wird nun ein eindeutiger kanonischer Vektor in $T(G)$ definiert, der diesen

Isomorphietyp repräsentiert. Insbesondere wird eine praktikable Methode beschrieben, um zu einem beliebigen Vektor t den kanonischen Vektor, den wir mit $\mathrm{Cf}(t)$ bezeichnen, zu berechnen. Die zu G isomorphe Gruppe $G(\mathrm{Cf}(t))$ nennen wir die kanonische Form von G. Der Algorithmus zur Berechnung von $\mathrm{Cf}(t)$ lässt sich in einem Computeralgebra-System wie zum Beispiel GAP implementieren. Wenn die Ergebnisse von Grunewald und Scharlau mit einbezogen werden, kann damit das Isomorphieproblem für $\mathcal{T}$-Gruppen der Hirschlänge höchstens 5 wie folgt gelöst werden.

Satz
Zwei beliebige $\mathcal{T}$-Gruppen G_1 und G_2 der Hirschlänge höchstens 5 sind genau dann isomorph, wenn sie den selben Typ haben und ihre kanonische Form übereinstimmt.

Ein weiteres Ergebnis dieser Arbeit ist die Beschreibung der **Automorphismengruppe** einer beliebigen $\mathcal{T}$-Gruppe der Hirschlänge höchstens 5.

Zum Schluss betrachten wir noch die $\mathcal{T}$-Gruppen des Typs $(n, 1, 1)$. Für diese haben wir zwar keine kanonische Form, aber ein Verfahren entwickelt, das für eine eine $\mathcal{T}$-Gruppe zu einer gegebenen Präsentation eine weitere Präsentation mit gleichen oder betragsmäßig kleineren Exponenten berechnet.

Literaturverzeichnis

[1] Camps, große Rebel, Rosenberger.
Einführung in die kombinatorische und geometrische Gruppentheorie.
Heldermann Verlag, 2008.

[2] W. A. de Graaf and A. Pavan.
Constructing arithmetic subgroups of unipotent groups.
J. Algebra, 322(11):3950–3970, 2009.

[3] B. Eick.
Algorithms for polycyclic groups.
Habitilationsschrift, Universität Kassel, 2001.

[4] B. Eick, A.-K. Engel
Hall Polynomials for the torsion free nilpotent groups of Hirsch length at most 5.
ArXiv, 2016

[5] B. Eick, A.-K. Engel
The torsion free nilpotent groups of Hirsch length at most 5.
submitted.

[6] A. Cayley.
On the theory of groups, as depending on the symbolic equation $\theta^n = 1$.
Philo-sophical Magazine,7, 1854.

[7] The GAP Group, GAP – Groups, Algorithms, and Programming,
Version 4.7.8; 2015. (http://www.gap-system.org)

[8] F. Grunewald and D. Segal. Some general algorithms, I: Arithmetic groups.
Ann. Math., 112:531 – 583, 1980.

[9] F. Grunewald and D. Segal.
Some general algorithms, II: Nilpotent groups.
Ann. Math., 112:585 – 617, 1980.

[10] F. J. Grunewald and R. Scharlau.
A note on finitely generated torsion-free nilpotent groups of class 2.
J. Algebra, 58(1):162–175, 1979.

[11] P. Hall.
The Edmonton notes on nilpotent groups.
Queen Mary College Mathematics Notes. Mathematics Department, Queen Mary College, London, 1969.

[12] P. Hall. The collected works of Philip Hall.
Oxford Science Publications. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1988. *Compiled and with a preface by K. W. Gruenberg and J. E. Roseblade, With an obituary by Roseblade.*

[13] D. F. Holt, B. Eick, and E. A. O'Brien.
Handbook of computational group theory.
Discrete Mathematics and its Applications (Boca Raton). Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2005.

[14] K. A. Hirsch.
On infinite soluble groups I.
Proc. London Math. Soc. (2), 44:53–60, 1938

[15] M.Newman.
Integral Matrices.
Academic Press, New York and London, 1972.

[16] D. J. S. Robinson.
A Course in the Theory of Groups, volume 80 of Graduate Texts in Math.
Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[17] C. C. Sims.
Computation with finitely presented groups.
Cambridge University Press, Cambridge, 1994.