

# Räumliche Gegenstücke zum Satz von Holditch

Müller, Hans Robert

Veröffentlicht in:  
Abhandlungen der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 30, 1979,  
S.54-61



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

## Räumliche Gegenstücke zum Satz von Holditch

Von **Hans Robert Müller**, Braunschweig

In der ebenen Kinematik gilt der bemerkenswerte Satz von A. HOLDITCH [1]: Werden die Endpunkte X, Y einer Strecke fester Länge  $d = a + b$  so bewegt, daß sie eine gegebene Eilinie gerade einmal durchlaufen, so beschreibt ein Punkt Z dieser Strecke mit den Abständen  $XZ = b$ ,  $ZY = a$  eine geschlossene, nicht notwendig wiederum konvexe Kurve. Für den Inhalt des von den beiden Kurven berandeten ringförmigen Bereichs gilt

$$F_X - F_Z = a b \pi,$$

wobei mit  $F_X$  der Inhalt des ebenen Bereichs bezeichnet wurde, der von der Bahnkurve des Punktes X, also von der Ausgangseilinie berandet wird. Entsprechendes gilt für  $F_Y = F_X$  und für  $F_Z$ .

### I

Wir gehen von einem dreigliedrigen Bewegungsvorgang  $B_3$  im dreidimensionalen Raum  $E^3$  aus. Er werde durch die Bewegung des Gangkreuzes, eines orthonormierten Dreibeins  $\{0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  gegenüber dem als fest angenommenen Rastkreuz, dem Dreibein  $\{0', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3\}$  erfaßt. Der reine Drehanteil von  $B_3$  erfüllt das schiefssymmetrische System von Ableitungsgleichungen

$$(1) \quad d \vec{e}_i = \omega_j \vec{e}_k - \omega_k \vec{e}_j \quad (i, j, k = 1, 2, 3 \text{ zyklisch})$$

mit den Integrierbarkeitsbedingungen

$$(2) \quad d \omega_i = \omega_j \wedge \omega_k.$$

Hierbei wird der CARTANsche Kalkül (alternierende Produkte „ $\wedge$ “, äußere Ableitungen „ $d$ “) zugrunde gelegt. Für die Schiebkomponente von  $B_3$  gilt

$$(3) \quad d \vec{0}' = \vec{\sigma} = \sigma_1 \vec{e}_1 + \sigma_2 \vec{e}_2 + \sigma_3 \vec{e}_3,$$

wozu noch als weitere Integrierbarkeitsbedingungen

$$(4) \quad d \sigma_i = \sigma_j \wedge \omega_k - \sigma_k \wedge \omega_j$$

hinzukommen. Ein dreigliedriger Bewegungsvorgang  $B_3$  wird nun festgelegt, wenn die  $\omega$  und  $\sigma$  lineare Differentialformen (Paffsche Formen) in drei Veränderlichen  $t_1, t_2, t_3$  sind. Wir beschränken uns auf solche  $B_3$ , denen im dreidimensionalen Phasenraum (Raum der Parameter  $t_i$ ) ein Gebiet  $G$  entspricht, das von einer geschlossenen, orientierbaren Fläche  $R = R(G)$  vom Zusammenhang einer Kugel berandet wird. Der Rand  $R$  bestimmt nun einen geschlossenen zweigliedrigen (flächenläufigen) Bewegungsvorgang  $B_2$ . Hierbei beschreiben im Gangraum befestigte Punkte geschlossene

Bahnflächen und umhüllen Ebenen, die im Gangraum fest sind, gleichfalls geschlossene Hüllbahnflächen.

Ist  $X$  ein Punkt des Gangraums, ist also bei festen  $x_i$

$$\overrightarrow{OX} = \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3,$$

so gilt wegen

$$\overrightarrow{O'X} = \vec{x}' = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OX}$$

für die Änderung gegenüber dem Rastraum

$$(5) \quad d\vec{x}' = \vec{\sigma}' + \vec{x}' \times \vec{\omega}' = \tau_1 \vec{e}_1 + \tau_2 \vec{e}_2 + \tau_3 \vec{e}_3$$

mit dem Drehvektor

$$(6) \quad \vec{\omega}' = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3.$$

Ausführlicher ist somit

$$(7) \quad \tau_i = \sigma_i + x_j \omega_k - x_k \omega_j.$$

Für die Punktdichte, also für das Raumelement (Volumselement)  $dJ_X$ , das der Punkt  $X$  bei  $B_3$  beschreibt, gilt nun

$$(8) \quad dJ_X = \tau_1 \wedge \tau_2 \wedge \tau_3.$$

Eine Ebene  $\alpha$  sei durch ihre Gleichung

$$\vec{u} \vec{x} - u_0 = 0$$

im Gangkreuz gegeben. Hier sei  $\vec{u} = u_1 \vec{e}_1 + u_2 \vec{e}_2 + u_3 \vec{e}_3$  und  $\vec{u}^2 = 1$ . Der bei  $B_3$  durchlaufenen Ebenenschar kommt nach geläufigen Formeln der Integralgeometrie [2] die Ebenendichte  $dM_\alpha$  zu, die nach [4], [5] in folgender Form dargestellt werden kann:

$$(9) \quad dM_\alpha = \sum u_i^2 \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k + \sum u_i u_j (\sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k - \sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k).$$

Die Integrale der Punkt- und Ebenendichten (8), (9) erstrecken wir über das Gebiet  $G$  des Phasenraums und wenden die allgemeine STOKESSche Formel

$$(10) \quad \int_G d\Omega = \int_{R(G)} \Omega$$

an. Unter Heranziehung der Integrierbarkeitsbedingungen (2), (4) erhalten wir jeweils quadratische Polynome in den  $x_i$  bzw.  $u_i$ . Durch die Wahl eines ausgezeichneten Gangkreuzes lassen sich hierin gewisse Koeffizienten zum Verschwinden bringen, was auf die folgenden Bedingungen (vgl. [3], [4]) hinausläuft:

$$(11) \quad \begin{aligned} \int_G (\sigma_k \wedge \sigma_i \wedge \omega_i + \sigma_k \wedge \sigma_j \wedge \omega_j) &= \int_{R(G)} \sigma_i \wedge \sigma_j = 0 \\ \int_G (\sigma_i \wedge \omega_i \wedge \omega_k - \sigma_j \wedge \omega_j \wedge \omega_k) &= \int_{R(G)} \sigma_i \wedge \omega_j = 0 \end{aligned}$$

Man braucht hierzu nur die Quadriken, zu deren Gleichungen man durch Integration von (8) bzw. (9) gelangt, auf Hauptachsen zu transformieren.

Wir erhalten so Formeln für den Rauminhalt  $J_X$  jenes Bereiches des Rastraums, dessen Randfläche vom Punkt X bei dem geschlossenen, flächenläufigen Bewegungsvorgang  $B_2$  beschrieben wird:

$$(12) \quad J_X = J_0 + A_1 x_1^2 + A_2 x_2^2 + A_3 x_3^2.$$

Hierbei bedeutet  $J_0$  den Inhalt des vom Ursprung 0 erzeugten Bereichs und gilt

$$(13) \quad A_i = \int_G \sigma_i \wedge \omega_j \wedge \omega_k = \frac{1}{2} \left( \int_R \sigma_j \wedge \omega_j + \int_R \sigma_k \wedge \omega_k \right).$$

Eine entsprechende Formel gilt für das Ebenenmaß (Ebeneninhalt)  $M_\alpha$  bei Zugrundelegung des gleichen ausgezeichneten Gangkreuzes, das allein durch den geschlossenen Bewegungsvorgang  $B_2$  bestimmt ist. Wir finden aus (9) mit (11) (vgl. [4], [5]).

$$(14) \quad M_\alpha = A_1 u_1^2 + A_2 u_2^2 + A_3 u_3^2.$$

Bei einem solchen Bewegungsvorgang  $B_2$ , der im Phasenraum der Randfläche  $R(G)$  entspricht, bildet die am Gangkreuz befestigte Ebene  $\alpha$  eine zweiparametrische Schar, hüllt also im allgemeinen eine geschlossene, orientierbare Fläche, den Rand eines Körpers  $K$  ein. Den Punkten von  $G$  entsprechen hierbei Schnittebenen von  $K$ . Das Ebenenmaß  $M_\alpha$  kann somit als Integral der mittleren Krümmung der konvexen Hülle  $\bar{K}$  von  $K$  gedeutet werden.

Von den Formeln (12) und (14) wollen wir nun weiterhin Gebrauch machen.

## II

Auf der Verbindungsgeraden zweier verschiedener Punkte  $X, Y$  des Gangraums erfassen wir durch

$$(15) \quad q_i = \lambda x_i + \mu y_i, \quad \lambda + \mu = 1$$

einen weiteren Punkt  $Q$ . Mit (12) finden wir für den Inhalt  $J_Q$  der Bahnfläche von  $Q$  bei einem geschlossenen  $B_2$

$$(16) \quad J_Q = \lambda^2 J_X + 2\lambda\mu J_{XY} + \mu^2 J_Y.$$

Hierin haben wir

$$(17) \quad J_{XY} = J_{YX} = J_0 + \sum A_i x_i y_i$$

als gemischten Bahninhalt der Punkte  $X$  und  $Y$  eingeführt.

Wegen

$$(18) \quad J_X - 2 J_{XY} + J_Y = \sum A_i (x_i - y_i)^2$$

erhalten wir neben (16) durch Elimination von  $J_{XY}$  auch die Darstellung

$$(19) \quad J_Q = \lambda J_X + \mu J_Y - \lambda \mu \sum A_i (x_i - y_i)^2.$$

Mit dem dreigliedrigen Bewegungsvorgang  $B_3$  über dem Bereich  $G$  des Phasenraums und damit mit dem zweiparametrischen geschlossenen Bewegungsvorgang  $B_2$ , der dem Rand  $R(G)$  entspricht, verknüpfen wir nun eine Maßbestimmung, bei der der Abstand  $D(X, Y)$  zweier Punkte  $X, Y$  des Gangraums durch

$$(20) \quad D^2(X, Y) = \varepsilon \sum A_i (x_i - y_i)^2$$

gemessen wird. Hierbei sei  $\varepsilon = \pm 1$ , je nachdem, ob für das gewählte Punktepaar  $X, Y$  die quadratische Form

$$\sum A_i (x_i - y_i)^2 \gtrless 0$$

ist. Der Abstand  $D(X, Y)$  wird durch diese Festsetzung stets reell. Im indefiniten und im semidefiniten Fall der quadratischen Form kann für gewisse Richtungen der Wert Null angenommen werden, was wir für die folgenden Überlegungen ausschließen wollen.

Wenn wir noch eine Orientierung der Geraden  $XY$  einführen, so können wir unterscheiden

$$D(X, Y) = -D(Y, X).$$

Statt (19) läßt sich nun schreiben

$$(21) \quad J_Q = \lambda J_X + \mu J_Y - \varepsilon \lambda \mu D^2(X, Y),$$

eine Formel, zu der in der ebenen Kinematik (vgl. [6]) ein Gegenstück existiert. Dies ist auch der Fall für folgende Umformung von (21): Messen wir die Abstände der drei kollinearen Punkte  $X, Y, Q$  ebenfalls in der mit  $B_2$  verbundenen Metrik, so finden wir wegen (15) und

$$D(X, Q) + D(Q, Y) = D(X, Y)$$

die Darstellung der Parameter

$$(22) \quad \lambda = \frac{D(Q, Y)}{D(X, Y)}, \quad \mu = \frac{D(X, Q)}{D(X, Y)}$$

und somit

$$(23) \quad J_Q = \frac{1}{D(X, Y)} \left( J_X \cdot D(Q, Y) + J_Y \cdot D(X, Q) \right) - \varepsilon D(X, Q) \cdot D(Q, Y)$$

Wir treffen nun, ähnlich wie beim Satz von HOLDITCH die Annahme, daß unser geschlossener Bewegungsvorgang  $B_2$  so beschaffen sei, daß stets auch der Punkt  $Y$  sich auf der Bahnfläche des Punktes  $X$  bewege, also bei einem solchen „HOLDITCH-schen Bewegungsvorgang  $B_2^1$  erster Art“ eine Strecke fester Länge so geführt werde, daß ihre Endpunkte  $X$  und  $Y$  die gleiche geschlossene orientierbare Bahnfläche beschreiben. Wir haben in (23) hierzu nur  $J_X = J_Y$  zu setzen, um folgende Formel zu erhalten:

$$(24) \quad J_X - J_Q = \varepsilon D(X, Q) \cdot D(Q, Y).$$

Sie stellt ein räumliches Gegenstück zum Satz von HOLDITCH der ebenen Kinematik dar: Durch sie wird der Rauminhalt des schalenförmigen Bereiches gemessen,

der von der doppelt durchlaufenen, d. h. bei  $B_2^1$  von X und Y beschriebenen Bahnfläche und der geschlossenen Bahnfläche des Punktes Q begrenzt wird. Dieses Volumen hängt nur von den Abmessungen der bewegten geometrischen Figur ab, wenn die Längenmessungen mittels der Metrik des  $B_2^1$  vorgenommen werden. Falls die quadratische Form in (18) definit, etwa positiv definit ist, d. h.  $A_i > 0$ , können wir abschätzen und neben (12) und (17) die SCHWARZsche Ungleichung heranziehen:

$$(J_X - J_0)(J_Y - J_0) - (J_{XY} - J_0)^2 \geq 0$$

oder, falls wir  $J_0 > 0$  annehmen,

$$(25) \quad J_X J_Y - J_{XY}^2 \geq J_0(J_X - 2 J_{XY} + J_Y) > 0.$$

Das Gleichheitszeichen gilt dann und nur dann, wenn die Punkte X, Y und 0 auf einer Geraden gewählt werden.

### III

Die Formeln (16), (21), (23) und auch (24) können dadurch verallgemeinert werden, daß wir von drei nicht kollinearen Punkten X, Y, Z des Gangraums ausgehen und einen Punkt Q der dadurch bestimmten Ebene mittels

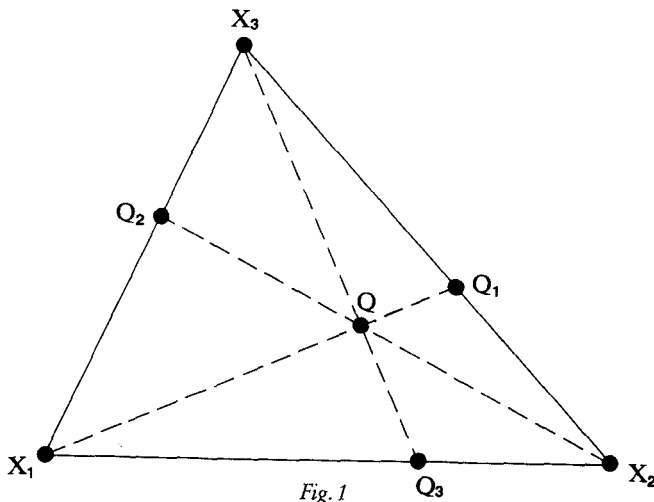
$$(26) \quad q_i = \lambda x_i + \mu y_i + \nu z_i, \quad \lambda + \mu + \nu = 1$$

erfassen. Bei einem geschlossenen  $B_2$  finden wir, ähnlich wie früher, aus (12) für den Inhalt der Bahnfläche des Punktes Q

$$(27) \quad J_Q = \lambda^2 J_X + \mu^2 J_Y + \nu^2 J_Z + 2\lambda\mu J_{XY} + 2\lambda\nu J_{XZ} + 2\mu\nu J_{YZ}.$$

Hierbei wurden entsprechend (17) gemischte Bahninhalte benutzt. Ihre Elimination mit Hilfe von (18) führt zu

$$(28) \quad J_Q = \lambda J_X + \mu J_Y + \nu J_Z - \lambda\mu \sum A_i (x_i - y_i)^2 - \lambda\nu \sum A_i (x_i - z_i)^2 - \mu\nu \sum A_i (y_i - z_i)^2,$$



wofür wir wiederum wegen (20) auch schreiben können

$$(29) \quad J_Q = \lambda J_X + \mu J_Y + \nu J_Z - \varepsilon_{12} \lambda \mu D^2(X, Y) - \varepsilon_{13} \lambda \nu D^2(X, Z) - \varepsilon_{23} \mu \nu D^2(Y, Z)$$

Die Parameter  $\lambda, \mu, \nu$  lassen sich auch in diesem Fall durch Längenverhältnisse von Strecken des bewegten Objektes (Dreieck) ausdrücken (vgl. Fig. 1).

Ändern wir für den Augenblick die bisherigen Bezeichnungen in  $X = X_1, Y = X_2, Z = X_3; \lambda = \lambda_1, \mu = \lambda_2, \nu = \lambda_3$ , so finden wir für  $i, j, k = 1, 2, 3$  (zyklisch)

$$\lambda_i = \frac{D(Q, Q_i)}{D(X_i, Q_i)} = \frac{D(X_j, Q) \cdot D(X_k, Q_j)}{D(X_j, Q_j) \cdot D(X_k, X_i)} = \frac{D(X_k, Q) \cdot D(Q_k, X_j)}{D(X_k, Q_k) \cdot D(X_i, X_j)}.$$

Damit kann statt (29) etwa auch

$$(30) \quad J_Q = \sum \frac{D(Q, Q_i)}{D(X_i, Q_i)} J_{X_i} - \sum \varepsilon_{ij} \left( \frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) \cdot D(X_i, Q_k)$$

geschrieben werden.

Wandern bei einem zweigliedrigen geschlossenen Bewegungsvorgang – analog zur HOLDITCHschen Annahme – die Punkte  $X_1, X_2, X_3$  auf der gleichen Bahnfläche, wobei wir von einer „HOLDITCHschen Bewegung  $B_2^2$  zweiter Art“ sprechen können, dann läßt sich die Differenz der Rauminhalte

$$(31) \quad J_X - J_Q = \sum \varepsilon_{ij} \left( \frac{D(X_k, Q)}{D(X_k, Q_k)} \right)^2 D(Q_k, X_j) \cdot D(X_i, Q_k)$$

ebenfalls nur durch die Maße der bewegten geometrischen Figur ausdrücken.

Die gleichen Überlegungen können auch für die Eckpunkte  $X_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) eines Tetraeders und einen auf ihnen aufgespannten beliebigen Punkt  $Q$  des Gangraumes angestellt werden. Man gelangt zu ähnlich gebauten Formeln und kann auch ein Gegenstück zum Satz von HOLDITCH aufstellen. In diesem Fall einer „HOLDITCH-Bewegung  $B_2^3$  dritter Art“ müssen sich die vier Punkte  $X_i$  auf der gleichen Bahnfläche bewegen, was nur unter geeigneten Voraussetzungen möglich ist\*). Für ebene HOLDITCH-Bewegungen wurden solche Bedingungen von R. THÜRING näher untersucht (vgl. [7]). Ähnliche Betrachtungen für unsere räumlichen  $B_2^2$  dürften nicht einfach sein.

#### IV

Nun mögen noch einige Formeln betreffend das Ebenenmaß  $M_\alpha$  angegeben werden. Wir gehen zuerst von zwei Ebenen  $\alpha, \beta$  mit den genormten Normalenvektoren  $\vec{u}, \vec{v}$  aus und betrachten Ebenen  $\gamma$ , für die

$$(32) \quad \vec{w} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad w^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu \vec{u} \vec{v} = 1$$

\*) Abzählende Betrachtungen zeigen, daß im allgemeinen dann der Bewegungsvorgang  $B_2^3$  durch Herumführen dieses Tetraeders im Innern der geschlossenen orientierbaren Fläche erzeugt werden kann.

als Normalenvektoren fungieren. Aus (14) folgt

$$(33) \quad M_\gamma = \lambda^2 M_\alpha + \mu^2 M_\beta + 2\lambda\mu M_{\alpha\beta}.$$

Entsprechend dem früheren Vorgehen bezeichnen wir hierin

$$(34) \quad M_{\alpha\beta} = \sum A_i u_i v_i$$

als gemischten Ebeneninhalte der von den Ebenen  $\alpha, \beta$  bei  $B_2$  umhüllten Hüllbahnflächen. Wegen

$$(35) \quad M_\alpha - 2 M_{\alpha\beta} + M_\beta = \sum A_i (u_i - v_i)^2 = \varepsilon D^2(U, V)$$

können wir auch schreiben

$$(36) \quad M_\gamma = \lambda (\lambda + \mu) M_\alpha + \mu (\lambda + \mu) M_\beta - \varepsilon \lambda \mu D^2(U, V)$$

Hierbei denken wir uns  $\overrightarrow{0U} = \vec{u}$ ,  $\overrightarrow{0V} = \vec{v}$  vom Punkt 0 abgetragen und messen mit der zu  $B_2$  gehörigen Metrik den Abstand der Punkte U, V.

Nun noch Zusammenhänge zwischen Punkt- und Ebeneninhalten:

Wir gehen von drei nicht kollinearen Punkten X, Y, Z des Gangraums aus. Die zugehörigen Bahninhalte  $J_X, J_Y, J_Z$  berechnen sich nach (12). Diese drei Formeln ergänzen wir noch durch die Beziehung (14) für eine beliebige Ebene  $\alpha$ . Aus diesen vier Gleichungen eliminieren wir nun die Koeffizienten  $A_i$ , was durch Nullsetzen einer Determinante geschehen kann:

$$(37) \quad \begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \Delta_X \\ y_1^2 & y_2^2 & y_3^2 & \Delta_Y \\ z_1^2 & z_2^2 & z_3^2 & \Delta_Z \\ u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & M_\alpha \end{vmatrix} = 0 \quad \text{mit} \quad \begin{cases} \Delta_X = J_X - J_0 \\ \Delta_Y = J_Y - J_0 \\ \Delta_Z = J_Z - J_0 \end{cases}$$

Fassen wir zur Abkürzung die Elemente in den ersten drei Spalten zu Vektoren

$$\vec{X} = x_1^2 \vec{e}_1 + x_2^2 \vec{e}_2 + x_3^2 \vec{e}_3, \dots; \quad \vec{U} = u_1^2 \vec{e}_1 + u_2^2 \vec{e}_2 + u_3^2 \vec{e}_3$$

zusammen, so lassen sich die linearen Beziehungen zwischen den Punktgehalten  $J_X, J_Y, J_Z$  und dem Ebeneninhalte  $M_\alpha$  in der Schreibweise von Spatprodukten

$$C_0 = (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{Z}), \quad C_1 = (\vec{Y}, \vec{Z}, \vec{U}), \quad C_2 = (\vec{Z}, \vec{X}, \vec{U}), \quad C_3 = (\vec{X}, \vec{Y}, \vec{U})$$

durch

$$(38) \quad C_1 J_X + C_2 J_Y + C_3 J_Z - (C_1 + C_2 + C_3) J_0 = C_0 M_\alpha$$

darstellen.

Ist im besonderen  $\alpha$  die Verbindungsebene der drei Punkte, dann haben wir noch

$$\vec{u} \vec{x} = \vec{u} \vec{y} = \vec{u} \vec{z} \quad \text{oder auch} \\ F \vec{u} = \vec{x} \times \vec{y} + \vec{y} \times \vec{z} + \vec{z} \times \vec{x}$$

mit F als doppeltem Flächeninhalt des Dreiecks X, Y, Z zu berücksichtigen.

In dualer Weise führen drei Ebenen  $\alpha, \beta, \gamma$  mit den nicht linear abhängigen Normalenvektoren  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  und ein beliebiger Punkt X zur Bedingung

$$(39) \quad \begin{pmatrix} u_1^2 & u_2^2 & u_3^2 & M_\alpha \\ v_1^2 & v_2^2 & v_3^2 & M_\beta \\ w_1^2 & w_2^2 & w_3^2 & M_\gamma \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \Delta_X \end{pmatrix} = 0.$$

Mit

$$D_0 = (\vec{U}, \vec{V}, \vec{W}), \quad D_1 = (\vec{V}, \vec{W}, \vec{X}), \quad D_2 = (\vec{W}, \vec{U}, \vec{X}), \quad D_3 = (\vec{U}, \vec{V}, \vec{X})$$

folgern wir daraus

$$(40) \quad D_1 M_\alpha + D_2 M_\beta + D_3 M_\gamma = D_0 (J_X - J_0).$$

Auch in diesem Fall kann  $X$  als Schnittpunkt der drei Ebenen gewählt werden.

Ähnliche Beziehungen zwischen Punkt- bzw. Ebeneninhalten lassen sich auch für 4 Punkte oder 4 Ebenen oder 2 Punkte und 2 Ebenen aufstellen.

### Literaturverzeichnis

- [1] A. Holditch, in: „Lady's and gentleman's diary for the year 1858“.
- [2] W. Blaschke: Vorl. über Integralgeometrie, 3. Aufl., Berlin 1955.
- [3] W. Blaschke: Über Integrale in der Kinematik, Arch. f. Math. **1** (1948), 18–22.
- [4] H. R. Müller: Zur Geometrie der dreigliedrigen Bewegungsvorgänge, Monh. f. Math. **55** (1951), 330–339.
- [5] H. R. Müller: Über Integrale bei mehrgliedrigen Bewegungsvorgängen, Math. Nachr. **7** (1952), 159–164.
- [6] H. R. Müller: Verallgemeinerung einer Formel von Steiner, Abh. der Braunsch. Wiss. Ges. **29** (1978), 107–113,  
Über Trägheitsmomente bei Steinerscher Massenbelegung, Abh. der Braunsch. Wiss. Ges. **29** (1978), 115–119.
- [7] R. Thüring: Studien über den Holditchschen Satz, Verhdl. Naturforsch. Ges. Basel **63** (1952), 221–251,  
Studien über die Holditchsche Bewegung, Verhdl. Naturforsch. Ges. Basel **67** (1956), 575 bis 594.