

Die hyperbolische Bewegung einer elektrischen Ladung und Folgerungen für das Larmorsche Strahlungsgesetz

Bausch, Hansjürgen

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 23, 1971/72,
S.291-309



Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Die hyperbolische Bewegung einer elektrischen Ladung und Folgerungen für das LARMORSche Strahlungsgesetz¹⁾

Von **Hansjürgen Bausch**

Vorgelegt von **Horst Tischner**

(Eingegangen am 30. Juli 1969)

Übersicht: Es wird gezeigt, daß eine hyperbolisch bewegte Ladung im Gegensatz zur Aussage des LARMORSchen Strahlungsgesetzes keine elektromagnetische Strahlung aussendet. Eine Analyse der Leistung der Strahlungsreaktionskraft legt es nahe, die Strahlungsleistung einer beliebig bewegten Ladung proportional dem skalaren Produkt aus Geschwindigkeit v und Ruck \ddot{v} zu setzen.

1. Vorbereitende Bemerkungen

Die hyperbolische Bewegung ist dadurch gekennzeichnet, daß ein Körper mit stets konstanter Beschleunigung gradlinig vorangetrieben wird. Dieser Körper (im folgenden kurz Ladung genannt), der vorläufig als punktförmig angenommen wird, trage eine elektrische Ladung Q . Dem elektromagnetischen Feld einer so bewegten Ladung kommt eine besondere Bedeutung zu. Sie besteht darin, daß die Betrachtung des Feldes eine Einschränkung des Gültigkeitsbereichs des Strahlungsgesetzes von LARMOR notwendig macht. In der üblichen Formulierung besagt dieses Gesetz, daß die von einer beschleunigten Ladung abgestrahlte Leistung dem Quadrat der Beschleunigung proportional ist (vergl. SOMMERFELD [1, § 19 B, p. 138]).

In der Elektrodynamik gewinnt man das Feld einer beliebig bewegten Ladung durch Integration der MAXWELLSchen Gleichungen. Die so entstandene, gebräuchliche Darstellung des Feldes verwendet retardierte Größen. Die zu einem bestimmten Zeitpunkt beobachteten Feldvektoren hängen ab vom Abstand des Aufpunktes vom Ort der Ladung und ihrem Bewegungszustand, die zu dem retardierten, d. h. um die Lichtlaufzeit vor der Beobachtungszeit liegenden Zeitpunkt gemessen wurden. Abhängig von der Entfernung des Aufpunktes sind daher jeweils verschiedene Abstandsvektoren, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Ladung zu berücksichtigen. Im Gegensatz zu dieser gebräuchlichen Darstellung werden im folgenden gleichzeitig gemessene Größen zur Beschreibung des Feldes herangezogen. So ist zwar nur in Ausnahmefällen eine geschlossene Formulierung möglich, man erhält aber ein unmittelbares Bild des augenblicklichen Feldes.

¹⁾ Auszug aus einer Dissertation an der TU Hannover. Der Verfasser dankt Herrn Prof. Dr.-Ing. habil. H. Tischner für die Förderung dieser Arbeit.

Zwei verschiedene Wege stehen zu einer Darstellung des Feldes in gleichzeitig gemessenen Größen zur Verfügung. Naheliegender ist der Gedanke, die retardierten Größen mit Hilfe von TAYLORSchen Reihen durch gleichzeitig gemessene Größen auszudrücken. Andererseits führt auch die Transformation des Feldes, das den Zustand des Raumes in einem mit der Ladung mitgeführten Bezugssystem beschreibt, auf das Bezugssystem des Beobachters zu einer Darstellung in gleichzeitigen Größen (für die gleichförmige Bewegung vgl. [1, § 28C und § 30A]). Im folgenden werden beide Methoden verwendet.

2. Das Feld einer gleichförmig bewegten Ladung

Vor der Untersuchung des Feldes einer hyperbolisch bewegten Ladung wird ein Exkurs über das elektromagnetische Feld einer Ladung in gleichförmiger Bewegung nützlich sein. In einem Inertialsystem S bewegt sich die Ladung Q mit der konstanten Geschwindigkeit v . Zur Berechnung des Feldes ziehen wir das Grundpostulat der speziellen Relativitätstheorie heran. Danach darf man zur Beschreibung von Naturvorgängen ein beliebiges Inertialsystem zugrunde legen, ohne daß sich die Form der Naturgesetze ändert. Wir beschreiben daher das Feld der gleichförmig bewegten Ladung in einem mit der Ladung mitgeführten Bezugssystem \bar{S} , das sich gegenüber dem ursprünglichen System S mit der Geschwindigkeit v in Richtung der positiven x -Achse (Abb. 1) bewegt. Im System \bar{S} findet man besonders einfache Verhältnisse, da hier der elektrostatische Charakter des Feldes einer ruhenden Punktladung vorliegt. Wir erhalten das bekannte kugelsymmetrische elektrische Feld, das im ersten COULOMBSchen Gesetz zum Ausdruck kommt.

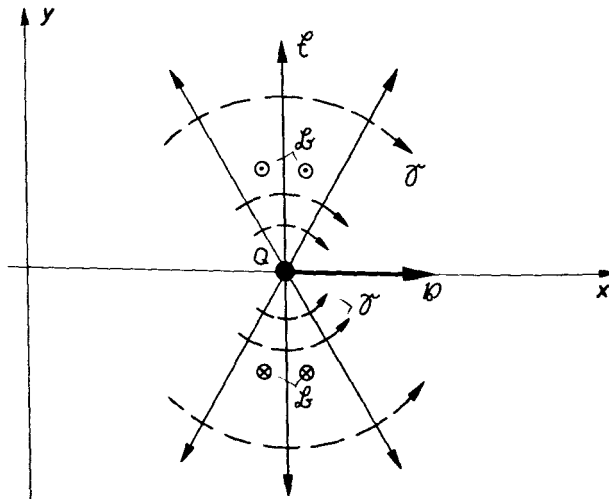


Abb. 1. Elektrische Feldstärke \mathcal{E} , magnetische Induktion \mathcal{B} und POYNTINGScher Vektor \mathcal{S} einer mit der Geschwindigkeit $|v| \ll c$ gleichförmig bewegten Ladung Q im Bezugssystem S

Von dem ursprünglichen Bezugssystem S aus beurteilt, bewegt sich die Ladung mit der Geschwindigkeit v . Hier hat ihr Feld elektromagnetischen Charakter. Neben der elektrischen Feldstärke \mathcal{E} tritt die magnetische Induktion \mathcal{B} auf. Um die Verbindung zwischen den in den beiden Inertialsystemen gemessenen Feldern herzustellen, gehen wir vom zweiten Grundpostulat der speziellen Relativitätstheorie aus. Danach besitzt das Licht in allen Inertialsystemen die gleiche Geschwindigkeit c . Das bedeutet, daß die MAXWELLSchen Gleichungen, die die Ausbreitung des Lichtes beschreiben, in allen Inertialsystemen die gleiche Form besitzen. Daraus ergeben sich die Transformationsgesetze der elektrischen Feldstärke und der magnetischen Induktion für den Übergang von einem Inertialsystem auf ein anderes. In dem hier betrachteten Fall des kugelsymmetrischen, elektrostatischen Feldes zeigt sich nach der Transformation, daß die Linien der elektrischen Feldstärke der bewegten Ladung in Richtung auf die Transversalebene der Bewegung zusammengedrängt erscheinen [1, § 28 C]. Die Linien der magnetischen Induktion bilden Kreisringe mit der Bahn des Teilchens als Achse.

Schließen wir hier sogleich eine Betrachtung des Poyntingschen Vektors der Energiestromdichte $\mathfrak{s} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$ an. Im Bezugssystem \bar{S} verschwindet sie überall, da keine magnetische Feldstärke vorhanden ist. Im System S fallen die Linien des vektoriellen Produktes aus \mathcal{E} und \mathcal{H} gemäß Abb. 1 mit den orthogonalen Trajektorien der elektrischen Feldstärke zusammen, da die Linien der magnetischen Feldstärke senkrecht zur Zeichenebene stehen.

Eine Abwanderung elektromagnetischer Energie in Form von Strahlung tritt im Bezugssystem S nicht auf; es ist keine radiale Komponente des POYNTINGSchen Vektors vorhanden. Der Energiestrom in der Nähe der Ladung sorgt allein dafür, daß die Energie des elektromagnetischen Feldes die Ladung auf ihrem Wege durch den Raum begleitet.

3. Aufgabenstellung

Unser Exkurs in den Bereich der gleichförmigen Ladungsbewegungen legt die Frage nahe, ob man für beschleunigte Bezugssysteme eine entsprechende Überlegung durchführen kann. Hier scheint sich von vornherein ein bedeutendes Hindernis aufzutürmen. Nach dem Strahlungsgesetz von LARMOR ist jede beschleunigte Ladungsbewegung mit einer Abstrahlung elektromagnetischer Energie verbunden. Die abgestrahlte Energie wandert mit Lichtgeschwindigkeit von der Ladung fort in den umgebenden Raum. Es ist daher nicht zu erwarten, daß man bei einer beschleunigten, strahlenden Ladung im mitgeführten Bezugssystem ein elektrostatisches Feld vorfindet. Der konservative Charakter dieses Feldes würde in Widerspruch zu dem Verlust an Energie durch Abstrahlung stehen. Bei den gleichförmigen Bewegungen drückt sich die Tatsache, daß keine Strahlung auftritt, gerade darin aus, daß das Feld im mitgeführten Bezugssystem elektrostatischer Natur ist.

Im Gegensatz zu dieser Vermutung hat BORN [2] in einer grundlegenden Arbeit gezeigt, daß es eine beschleunigte Bewegung gibt — die hyperbolische Bewegung — bei der im mitgeführten Bezugssystem ein elektrostatisches Feld existiert. Er schließt

daraus, daß die Ladung, die ihr Feld mit sich führt, keine Strahlung aussendet [2, p. 5, 37]. Es besteht daher ein fundamentaler Widerspruch zwischen der Aussage BORNs und dem LARMORSchen Strahlungsgesetz. In der Literatur knüpft sich eine lange, kontroverse Diskussion an diese Frage. So bestätigt PAULI in seinen Ausführungen über die Relativitätstheorie in der Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften [3, p. 647, 648 und 654] das Verschwinden der Strahlung bei der hyperbolisch bewegten Ladung. Unabhängig davon kommen SCHOTT [4, p. 63] und MILNER [5] zur entgegengesetzten Aussage. In neuerer Zeit verwirft DRUCKEY [6] die Argumente, die BORN und PAULI für das Verschwinden der Strahlung angeführt haben. Ebenso wie er entscheiden sich BONDI und GOLD [7], FULTON und ROHRICH [8] sowie SYNGE [9] für das LARMORSche Gesetz, während ARZELIÈS [10] auf gewisse Schwierigkeiten aufmerksam macht, die diese Entscheidung offen läßt. In jüngerer Zeit neigen also die Autoren mehr dem LARMORSchen Gesetz zu. Diese Entscheidung zu prüfen, ist das Ziel der folgenden Überlegungen.

4. Die hyperbolische Bewegung einer elektrischen Ladung und ihr Feld im mitgeführten Bezugssystem

In Analogie zu dem bei den gleichförmigen Bewegungen geübten Verfahren bestimmen wir zunächst das elektrische Feld einer hyperbolisch bewegten Ladung in ihrem Ruhssystem, um im Abschnitt 5 durch eine Transformation auf das Inertialsystem des Beobachters überzugehen.

Als Ausgangspunkt wählen wir die Frage, ob es beschleunigte Bewegungen gibt, bei denen die MAXWELLSchen Gleichungen im Ruhssystem der Ladung elektrostatischen Charakter annehmen. Dazu sind diese Gleichungen in allgemeiner Form für beschleunigte Koordinatensysteme niederzuschreiben und die Bedingungen für ihre Zeitunabhängigkeit abzulesen. Unter Beschränkung auf zeitorthogonale Koordinatensysteme, d. h. Systeme, in denen die raum-zeitlichen Koordinaten des Maßtensors verschwinden, lauten die MAXWELLSchen Gleichungen in dreidimensionaler, symbolischer Schreibweise (MÖLLER [11, p. 305])

$$\operatorname{rot}(\sqrt{-g_{44}} \mathfrak{B}) - \frac{1}{c^2} \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sqrt{\gamma} \mathfrak{E}}{\sqrt{-g_{44}}} \right) = \frac{1}{\epsilon_0 c^2} \rho v, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} (\sqrt{\gamma} \mathfrak{B}) = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \left(\frac{\mathfrak{E}}{\sqrt{-g_{44}}} \right) = 0, \quad (3)$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0. \quad (4)$$

Darin bedeuten c , ϵ_0 , ρ und t in üblicher Bezeichnungsweise die Lichtgeschwindigkeit, die elektrische Feldkonstante, die Ladungsdichte und die Zeit. In krummlinigen Koordinaten gelten für die Rotation und die Divergenz folgende Definitionen

$$\operatorname{rot}^*(A_\mu) := \epsilon^{\lambda\mu} \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\lambda}, \quad \operatorname{div} A^\alpha := \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\sqrt{\gamma} A^\alpha).$$

In diesen tensoriellen Definitionsgleichungen durchlaufen griechische Indizes die Werte $1 \cdots 3$ und es gilt die EINSTEINSche Summenkonvention. Die Größe $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ ist eine in allen drei Indizes alternierende Tensordichte mit den Werten $+\gamma^{-1/2}$, wenn die Indizes eine gerade Permutation der Zahlen 1, 2, 3 bilden, und $-\gamma^{-1/2}$, wenn den Indizes eine ungerade Permutation entspricht. Das Symbol γ bezeichnet die Determinante der räumlichen Koordinaten des Meßensors, dessen einzige von Null verschiedene Zeitkoordinate g_{44} ist.

In einem beschleunigten Koordinatensystem unterscheiden sich die MAXWELLSchen Gleichungen von ihrer geläufigen, für Inertialsysteme gültigen Form dadurch, daß die Koordinaten des Maßensors in vielfältiger Weise in die Operationen der Rotation, der Divergenz und der zeitlichen Ableitung eingehen. Da die Gleichungen (1...4) für das Ruhsystem \bar{S} der Ladung gelten sollen, ist in Gl. (1) $v = 0$ zu setzen (von jetzt ab werden alle Größen dieses mitgeführten Systems mit Querstrichen gekennzeichnet). Mit der zusätzlichen Forderung, daß die Koordinaten des Maßensors zeitunabhängig sind, nehmen die Gleichungen elektrostatischen Charakter an. Man kann zeigen [12], daß die hyperbolische Bewegung die einzige translatorische Bewegung ist, die dieser Bedingung genügt.

Läßt man die Bewegungsrichtung mit der x -Achse des zugrunde gelegten Inertialsystems zusammenfallen, so lautet die Bewegungsgleichung

$$\xi^2 - (ct)^2 = \alpha^2. \quad (5)$$

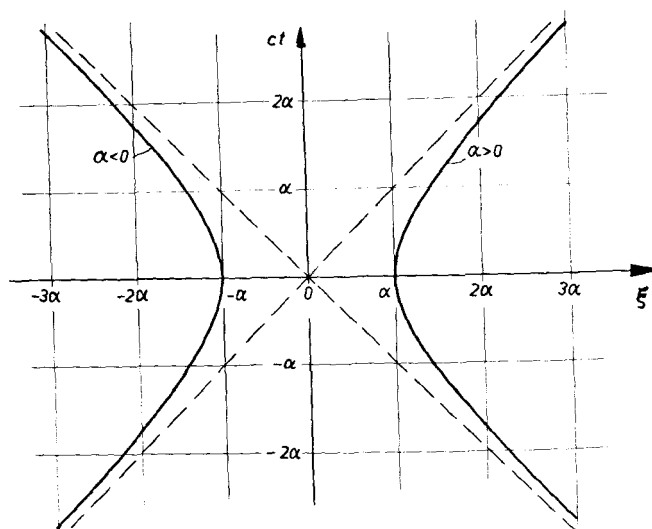
Darin bezeichnet ξ den Ort der Ladung, α wird definiert durch $\alpha = \frac{c^2}{g}$, wobei g die konstante, in Richtung der positiven x -Achse orientierte Beschleunigung der Ladung ist. Diese Gleichung hatte bereits BORN [2] auf anderem Wege gefunden, indem er nach der Bewegungsgleichung einer Masse fragte, die mit konstanter Beschleunigung vorangetrieben wird, wenn man das Anwachsen der Masse mit zunehmender Geschwindigkeit berücksichtigt. Die Bewegungsgleichung beschreibt eine Hyperbel, die Abb. 2 zeigt. Die Ladung kommt fast mit Lichtgeschwindigkeit aus dem Unendlichen auf den Beobachter zu. Ihre Geschwindigkeit nimmt unter dem Einfluß der konstanten Verzögerung ständig ab bis die Ladung zum Zeitpunkt $t = 0$ im Punkt $\xi = \alpha$ zur Ruhe kommt und sich dann mit zunehmender Geschwindigkeit in umgekehrter Richtung wieder entfernt. Der zweite Ast der Hyperbel beschreibt eine entsprechende Bewegung mit entgegengesetzter Beschleunigung.

Aus der Bewegungsgleichung ergibt sich die Transformationsvorschrift

$$\bar{x} = \sqrt{x^2 - (ct)^2} - \alpha, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z, \quad (6)$$

$$c\bar{t} = \alpha \operatorname{arsinh} \frac{ct}{\sqrt{x^2 - (ct)^2}},$$

die die Koordinaten des mitgeführten Systems mit denen des Inertialsystems des Beobachters verknüpft. Offenbar kann das mitgeführte System \bar{S} nur einer Ladung folgen, die stets den einen Ast der Bewegungshyperbel durchleilt. Entscheidet man sich für den rechten Ast ($\alpha > 0$) in Abb. 2, so muß der Punkt $\bar{x} = 0$ dem Ort der

Abb. 2. Die hyperbolische Bewegung $\xi^2 - (ct)^2 = \alpha^2$

Ladung entsprechen. In der Transformationsvorschrift (6) ist daher das positive Vorzeichen für die Wurzel zu verwenden. Es gilt generell

$$\bar{x} + \alpha = \sqrt{x^2 - (ct)^2} > 0. \quad (7)$$

Diese Ungleichung hat nur einen Sinn, wenn man verlangt, daß die Ungleichung

$$x^2 - (ct)^2 > 0 \quad (8)$$

erfüllt wird. Die Koordinate x des Inertialsystems darf also nicht unabhängig von der Zeit bzw. dem entsprechenden Ort der Ladung gewählt werden. Der Aufpunkt muß außerhalb der zum Zeitpunkt $t = 0$ von Ursprung auslaufenden Lichtkugel liegen. Die Bedeutung dieser Bedingungen wird sich im Abschnitt 5 zeigen.

Mit den Einschränkungen (7) und (8) ist die Transformation eindeutig umkehrbar. Ihre zweite Ableitung bleibt stetig; sie ist also erlaubt. Die Matrix des Maßensors nimmt die Gestalt

$$\bar{g}_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\left(1 + \frac{\bar{x}}{\alpha}\right)^2 \end{pmatrix}$$

an. Das mitgeführte System ist zeitorthogonal, zeitinvariant und in seinem räumlichen Teil sogar EUKLIDISCH. Damit gehen die MAXWELLSchen Gleichungen (1...4) für das Ruhssystem der Ladung in die Form

$$\overline{\text{rot}} \left[\left(1 + \frac{\bar{x}}{\alpha}\right) \bar{\mathfrak{B}} \right] = 0, \quad \overline{\text{rot}} \bar{\mathfrak{E}} = 0, \quad (9), (10)$$

$$\overline{\operatorname{div}} \bar{\mathfrak{B}} = 0, \quad \overline{\operatorname{div}} \left(\frac{\bar{\mathfrak{E}}}{1 + \frac{\bar{x}}{\alpha}} \right) = 0 \quad \text{für } \bar{r} \neq 0 \quad (11), (12)$$

über. Da sich die Ladung in Ruhe befindet, wird der Ansatz $\bar{\mathfrak{B}} = 0$, $\bar{\mathfrak{E}} = -\overline{\operatorname{grad}} \bar{\varphi}$ gewählt. Aus Gl. (12) ergibt sich für das Potential $\bar{\varphi}$ die Differentialgleichung

$$\Delta \bar{\varphi} - \frac{1}{\alpha + \bar{x}} \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{x}} = 0 \quad \text{für } \bar{r} \neq 0. \quad (13)$$

Infolge der Beschleunigung des Systems tritt zum LAPLACESchen Operator ein Summand hinzu, der die erste Ableitung des Potentials enthält und einen ortsabhängigen Koeffizienten aufweist.

Die Hauptlösung dieser Differentialgleichung wurde von BORN [2, p. 37], WHITTAKER [13] und COPSON [14] angegeben. Sie beschreibt ein Feld, dessen Äquipotential-

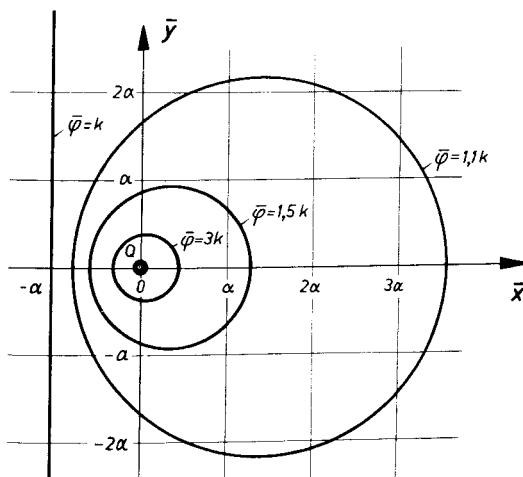


Abb. 3. Äquipotentialflächen der hyperbolisch bewegten Punktladung Q im mitgeführten System \bar{S}

flächen exzentrische Kugeln bilden (Abb. 3). Ihre Schnittlinien mit der Zeichnungsebene sind APOLLONISCHE Kreise. Damit ist BORNs Ergebnis bestätigt; die Ladung führt ihr Feld mit sich wie bei einer gleichförmigen Bewegung.

5. Das elektromagnetische Feld im Inertialsystem

Um die Frage nach der Strahlung der hyperbolisch bewegten Ladung zu prüfen, wird das Feld des mitgeführten beschleunigten Bezugssystems auf das der Bewegung zugrunde liegende Inertialsystem transformiert. Mit der Abkürzung

$$N := + \sqrt{4\alpha^2 (y^2 + z^2) + [x^2 + y^2 + z^2 - \alpha^2 - (ct)^2]^2}$$

ergibt sich die Darstellung

$$\begin{aligned}
 E_x &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4x^2 [(ct)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - x^2]}{N^3}, \\
 E_y &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{8x^2 xy}{N^3}, & E_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{8x^2 xz}{N^3}, \\
 B_x &= 0, & B_y &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{8x^2 zt}{N^3}, & B_z &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{8x^2 yt}{N^3}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

Die Singularitäten des Feldes liegen auf der x -Achse bei $x_1 = +\xi = +\sqrt{x^2 + (ct)^2}$ und $x_2 = -\xi = -\sqrt{x^2 + (ct)^2}$. Die erste entspricht einer positiven Punktladung, die sich auf dem rechten Ast der Bewegungshyperbel befindet, die zweite beschreibt eine negative Ladung, die den linken Ast durchläuft.

In den Gleichungen (14) erscheinen die Feldgrößen in Abhängigkeit von der Zeit. Um ein anschauliches Bild des Feldes zu erhalten, ist es zweckmäßig, anstelle der Zeit den Ort ξ der Ladung, ihre Geschwindigkeit v_x und ihre Beschleunigung \dot{v}_x einzuführen. Auf diese Weise entsteht eine Darstellung, die für verschwindende Beschleunigung mit dem Feld einer gleichförmig bewegten Ladung identisch ist (Abb. 1). Infolge der Beschleunigung bei der hyperbolischen Bewegung bilden die Linien des elektrischen Feldes keine Geraden mehr, sondern sie sind zu Kreislinien verbogen (Abb. 4). Die Linien der magnetischen Induktion \mathfrak{B} stellen wie üblich konzentrische Kreise dar mit der Bahn des Teilchens als Achse. Allein ihre Dichte wird durch die Beschleunigung beeinflusst. Die Linien des Poyntingschen Vektors \mathfrak{s} sind die orthogonalen Trajektorien der elektrischen Feldstärke. Die Darstellung des

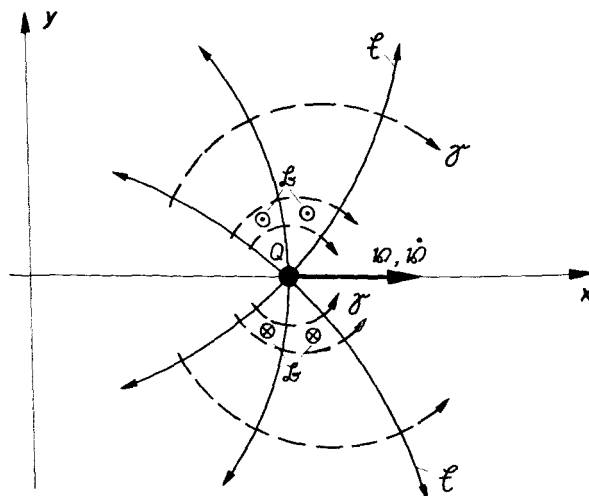


Abb. 4. Elektrische Feldstärke \mathfrak{E} , magnetische Induktion \mathfrak{B} und POYNTINGSCHER Vektor \mathfrak{s} der hyperbolisch bewegten Ladung Q im Inertialsystem S

Feldes in Gl. (14) wurde bereits von BORN [2] gefunden. FULTON und RÖHRLICH [8] bestätigen sie, indem sie die retardierten Größen der gebräuchlichen Darstellung des Feldes einer beschleunigten Ladung mit Hilfe der hyperbolischen Bewegungsgleichung durch gleichzeitig gemessene ersetzen.

Dabei ergibt sich für den retardierten Abstand zwischen Aufpunkt und Ladung der Ausdruck

$$R = \frac{1}{2[x^2 - (ct)^2]} \{xN - ct[y^2 + z^2 + a^2 - x^2 + (ct)^2]\}.$$

Will man keine der Ursache vorausseilenden Wirkungen (avancierte Felder) zulassen, so muß man verlangen, daß der Zeitpunkt $t - \frac{R}{c}$ der Aussendung des Feldes vor dem Zeitpunkt t der Beobachtung liegt, d.h., daß $t - \left(t - \frac{R}{c}\right) = \frac{R}{c} > 0$ also $R > 0$ ausfällt. Diese Bedingung gilt bei der Darstellung des Feldes in retardierten Größen als Voraussetzung. Drückt man jedoch den retardierten Abstand R wie oben durch gleichzeitige Größen aus, so gilt $R > 0$ nur solange $x + ct > 0$ ist. In der zweidimensionalen Darstellung der Abb. 5 bedeutet dies, daß die Spur des von einem Weltpunkt des rechten Hyperbelastes ausgehenden, in die Zukunft weisenden Lichtkegels oberhalb der Geraden $x + ct = 0$ liegt. Ein Lichtsignal, das von diesem Punkt ausgeht, kann nur Punkte innerhalb des zukünftigen Lichtkegels erreichen. In entsprechender Weise liest man aus Abb. 5 ab, daß ein von dem linken Hyperbelast ausgehendes Lichtsignal die Punkte oberhalb der Geraden $x - ct = 0$ erfaßt. Der Bereich $x + ct > 0$, $x - ct < 0$ unterliegt daher der Wirkung beider Ladungen. In dem Quadranten mit der Kennzeichnung $x + ct > 0$, $x - ct > 0$ wird dagegen

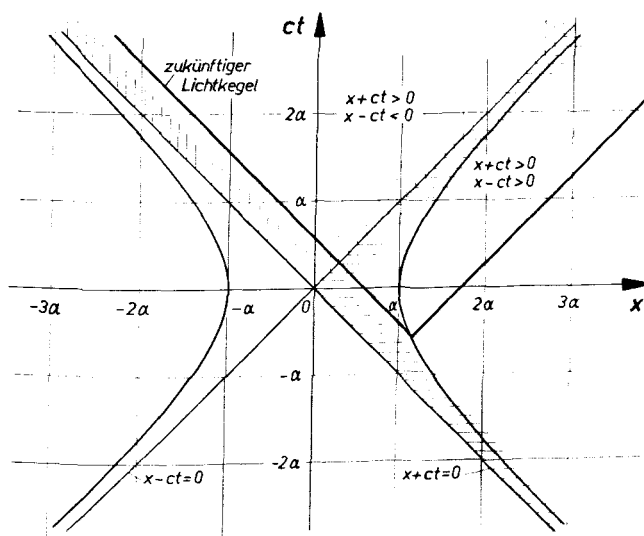


Abb. 5. Einflußbereiche der Ladungen bei der hyperbolischen Bewegung

das elektromagnetische Feld allein von der positiven Ladung hervorgerufen, die den rechten Hyperbelast durchläuft.

Damit wird auch die Bedeutung der Ungleichung (8) offenbar. Sie tritt als Bedingung dafür auf, daß die Weltpunkte des Inertialsystems durch die Transformation (6) mit reellen Punkten des mitgeführten Systems verbunden sind. Selbstverständlich kann ein mitgeführtes System, das einer Ladung auf dem rechten Hyperbelast folgt, allein das Feld dieser Ladung erfassen. Das drückt sich bereits bei der Transformation dadurch aus, daß Weltpunkte, die dem Einfluß beider Ladungen unterliegen, komplexen Punkten des mitgeführten Systems entsprechen.

Um allein das Feld der positiven Ladung zu erfassen, muß man den Gültigkeitsbereich der Darstellung des Feldes einschränken. Im dreidimensionalen Anschauungsraum bedeutet dies, daß eine Begrenzungsebene, die stets mit Lichtgeschwindigkeit wandert, für die Zeit $t < 0$ vor der Ladung herläuft, bis sie zum Zeitpunkt $t = 0$ den Ursprung erreicht und mit der y - z -Ebene zusammenfällt. Die Ladung hat zu dieser Zeit ihren Ruhepunkt $x = \alpha$ erreicht. Für die Zeit $t > 0$ kehrt sich der Richtungssinn der Geschwindigkeit um. Die Grenze läuft jetzt hinter der Ladung her, erreicht sie jedoch niemals, da ihre Geschwindigkeit asymptotisch gegen die des Lichtes wächst.

6. Welche Strahlungsleistung tritt durch die Oberfläche eines um die Ladung gelegten Hüllzylinders?

Nach den Einschränkungen des letzten Abschnittes ist der Bereich des elektromagnetischen Feldes, der allein von der positiven Punktladung auf dem rechten Ast der Bewegungshyperbel beeinflußt wird, durch die Ungleichungen $x + ct > 0$ für $t < 0$ und $x - ct > 0$ für $t > 0$ beschrieben. Man kann daher nicht, wie es sonst gebräuchlich ist, eine Kugel von sehr großem Radius für die Berechnung der Strahlungsleistung zugrunde legen, ohne diesen Bereich zu verlassen. Da die Form der gewählten Oberfläche für die Strahlungsleistung unwesentlich sein muß, wird man bei der hyperbolischen Bewegung einen Hüllzylinder um die Ladung legen, dessen linke Stirnfläche rechts von der Begrenzungsebene liegt. Das Oberflächenintegral der Normalkomponenten des POYNTINGSchen Vektors über den Zylinder gibt die Leistung an, die von der Ladung abgestrahlt wird.

Bei der gleichförmigen Bewegung einer elektrischen Ladung liegen die Feldlinien des POYNTINGSchen Vektors auf Kugelschalen, deren Mittelpunkt die Ladung bildet (Abb. 1). Das Feldbild ist symmetrisch zu einer durch die Ladung gelegten Transversalebene der Bahn des Teilchens. Auf einem Hüllzylinder mit der Bahn der Ladung als Achse und gleichen Abständen der Stirnfläche von der Ladung wird man stets die Strahlungsleistung Null messen. Bei der hyperbolischen Bewegung zeigt dagegen das Feldbild des POYNTINGSchen Vektors eine radiale Komponente (Abb. 4). Die Symmetrie zur Transversalebene ist verlorengegangen. Legt man wiederum einen Hüllzylinder um die Bahn der Ladung als Achse, so zeigt sich, daß der Energiefluß durch die Mantelfläche verschwindet, wenn man den Radius des Zylinders über alle

Grenzen wachsen läßt. Der Energiefluß P_x , der durch eine Stirnfläche in x -Richtung wandert, ist von der Lage x der Stirnfläche abhängig (Abb. 6). Am Ort der Ladung wächst er über alle Grenzen. Das liegt daran, daß mit einer Punktladung gerechnet wurde; die Energiestromdichte wird am Ort der Ladung unendlich groß. Für die abgestrahlte Leistung kommt es allein darauf an, zu zeigen, daß man vor und hinter

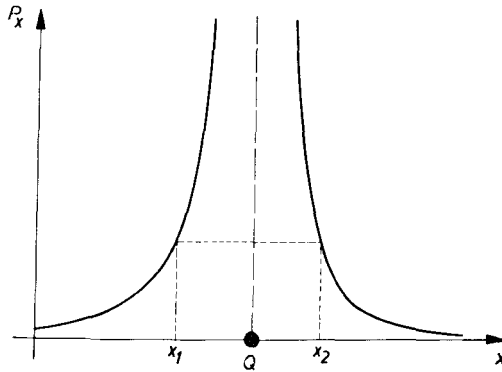


Abb. 6. Leistungsfluß in x -Richtung und Lage der Stirnflächen eines Zylinders, für den der heraustretende Energiefluß verschwindet

der Ladung stets eine mögliche Lage der Stirnflächen so angeben kann, daß durch die linke Stirnfläche genausoviel Energie in das Innere des Zylinders einwandert, wie durch die rechte austritt. Wie man aus Abb. 6 erkennt, ist das stets möglich. Es gibt also eine Hüllfläche, aus deren Innenraum im ganzen keine Leistung abwandert.

Daraus dürfen wir den Schluß ziehen, daß die hyperbolische Ladungsbewegung nicht mit einer Abstrahlung von Energie verbunden ist; wenn eine Ladung Energie abstrahlt, gibt es sicher keine Möglichkeit, sie so in eine Hüllfläche einzuschließen, daß der heraustretende Leistungsfluß verschwindet. Damit hat sich die Erwartung bestätigt, daß auch im Inertialsystem keine Strahlung vorhanden ist, wenn im mitgeführten Bezugssystem ein konservatives Feld vorliegt.

7. Kritik am LARMORSchen Strahlungsgesetz

Um die Ursache für diesen Widerspruch zum LARMORSchen Strahlungsgesetz zu erkennen, ist zu beachten, daß dieses Gesetz auf der Darstellung des Feldes in retardierten Größen beruht. Es ist gebräuchlich, ein System von Kugelkoordinaten zu verwenden, dessen Ursprung in den retardierten Ort der Ladung fällt. In diesem System beträgt die Radialkoordinate des POYNTINGSchen Vektors für eine longitudinal beschleunigte Ladung (vergl. [1, § 30])

$$S_r = \frac{Q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 c} \frac{R^2 \sin^2 \theta \left[V \left(1 - \frac{V^2}{c^2} \right) + R \frac{\dot{V}}{c} \right]^2}{R^6 \left(1 - \frac{V}{c} \cos \theta \right)^6}. \quad (15)$$

Darin sind alle Größen zum retardierten Zeitpunkt $T = t - \frac{R}{c}$ gemessen und zum Unterschied zu den gleichzeitig gemessenen Größen mit großen Buchstaben bezeichnet. Der Winkel Θ wird von den Vektoren $\mathfrak{R} = r \left(t - \frac{R}{c} \right)$ und $\mathfrak{v} = v \left(t - \frac{R}{c} \right)$ aufgespannt. Für den Sonderfall $V = 0$ ist das Oberflächenintegral der Gl. (15) für eine um den Ursprung gelegte Hüllkugel besonders einfach auszuwerten. Man erhält für die nach außen abwandernde Strahlungsleistung

$$P = \frac{Q^2 \dot{v}^2}{6\pi \epsilon_0 c^3}. \quad (16)$$

Dies ist das LARMORSche Strahlungsgesetz. Es gilt zunächst nur für das Inertialsystem, in dem die retardierte Geschwindigkeit verschwindet. Man kann jedoch zeigen [9] daß das Ergebnis (16) invariant gegen LORENTZsche Transformationen ist, und daher für alle Inertialsysteme gilt.

Die abgestrahlte Leistung ist danach dem Quadrat der Beschleunigung proportional, also bei jeder beschleunigten Bewegung von Null verschieden. Daß diese Aussage unzutreffend ist, läßt sich an der hyperbolischen Bewegung zeigen. Nach Gl. (15) verschwindet die radiale Koordinate des Poyntingschen Vektors, wenn die eckige Klammer im Zähler des Quotienten den Wert Null annimmt. Aus der Bewegungsgleichung (5) folgt, daß dies zum Zeitpunkt $t = 0$ bei der hyperbolischen Bewegung eintritt. Darüber hinaus erkennt man aus der Darstellung des elektromagnetischen Feldes in Gl. (14), daß für $t = 0$ die magnetische Feldstärke und mit ihr der POYNTINGSche Vektor im ganzen Raum verschwindet. Zu diesem Zeitpunkt ist also keine Abstrahlung von elektromagnetischer Energie möglich. Zusammen mit der Invarianz der Strahlungsleistung gegen LORENTZsche Transformationen bestätigt dieses Ergebnis die Begründung, die PAULI [3, p. 647, 648] für das Verschwinden der Strahlungsleistung bei der hyperbolischen Bewegung gegeben hat.

Um die Ursache für das Versagen des LARMORSchen Gesetzes bei der hyperbolischen Bewegung zu erkennen, skizzieren wir den Grundgedanken, auf dem dieses Gesetz beruht. Die zum Zeitpunkt $T = t - \frac{R}{c}$ emittierte Strahlung wandert mit Lichtgeschwindigkeit von der Ladung fort in den umgebenden Raum. In diesem Augenblick befindet sich die Ladung vor dem Ort, den sie zum Zeitpunkt t einnimmt (Abb. 7). Zur Zeit t der Beobachtung erreicht die abwandernde Strahlung die Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunkt der retardierte Ort $\xi \left(t - \frac{R}{c} \right)$ der Ladung ist. Auf der Oberfläche der Kugel wird die abgestrahlte Leistung gemessen.

Diese Vorstellung, die dem LARMORSchen Gesetz zugrunde liegt, ist physikalisch unzutreffend. Die Energie wird nicht wie die Photonen einer Lichtquelle zu einem bestimmten Zeitpunkt emittiert, sondern der ganze Raum in der Umgebung einer bewegten Ladung ist stets von einem Energiestrom erfüllt. Während der Zeit, die das Licht braucht, um die Oberfläche der Kugel zu erreichen, entfernt sich die beschleunigte Ladung vom Mittelpunkt der Hüllkugel und nähert sich ihrem Rand.

Dabei durchstößt der die Ladung begleitende Energiestrom die Oberfläche und täuscht so eine abwandernde Strahlung vor. Abb. 7 zeigt diese Situation für den Zeitpunkt $T = 0$, $ct = R = \frac{\alpha}{2}$.

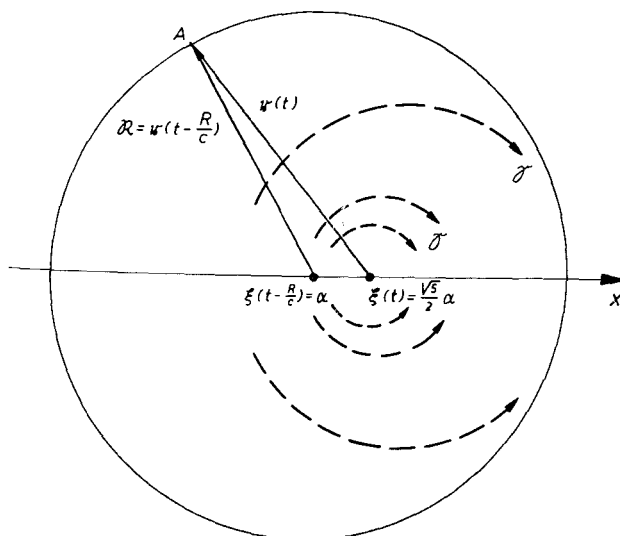


Abb. 7. Bewegung der Ladung während der Lichtlaufzeit und Energiestrom

$$\left(T = 0, \quad R = ct = \frac{\alpha}{2}, \quad \xi \left(t - \frac{R}{c} \right) = \alpha, \quad \xi(t) = \frac{\sqrt{5}}{2} \alpha \right)$$

Um den Fehler zu vermeiden, den man bei der Anwendung des LARMORSchen Strahlungsgesetzes auf die hyperbolische Bewegung begeht, muß man sich von der dabei verwendeten speziellen Hüllfläche lösen und beliebig geformte Flächen zulassen. Gelingt es, darunter eine Fläche zu finden, aus der kein Energiestrom austritt, so ist keine Strahlung vorhanden.

Diese Kritik am LARMORSchen Strahlungsgesetz trifft nur für Bewegungen zu, bei denen sich die Ladung weit von ihrem Ausgangspunkt entfernt. Bei einer periodischen Ladungsbewegung etwa in der Form eines Wechselstromes ist dies nicht der Fall. Hier führt das LARMORSche Strahlungsgesetz zu einer korrekten Aussage. Im Abschnitt 10 wird darauf näher eingegangen.

8. Die Rückwirkungskraft der Strahlung

Nachdem sich das LARMORSche Strahlungsgesetz bei der hyperbolischen Bewegung als korrekturbedürftig erwiesen hat, ist die Frage zu stellen, welche Hüllfläche man bei der Messung der Strahlungsleistung einer beliebig bewegten Ladung zugrunde legen soll. Bei jeder Ladungsbewegung ist der ganze Raum des Feldes von Quellen und Senken des Energiestromes erfüllt. Durch eine Hüllfläche kann man

den Raum offenbar nur in zwei Teile zerlegen und eine Strahlungsleistung angeben, die von dem einen in dem anderen Teilraum übertritt. So ergibt sich keine allgemeine, sondern eine spezielle Definition der Strahlungsleistung, die sich auf eine bestimmte Hüllfläche bezieht.

In dieser Situation bietet die Reaktionskraft der Strahlung einen neuen Ansatzpunkt für die weitere Überlegung. Größe und Richtung dieser Kraft können auf verschiedenen Wegen bestimmt werden [1, § 36]. Der einfachste, in der Literatur häufig dargestellte Weg, geht von einer Energiebilanz aus. Sie verlangt, daß sich die Leistung der Reaktionskraft der Strahlung und die Strahlungsleistung des LARMORschen Gesetzes im zeitlichen Mittel zu Null ergänzen. Mit der Annahme, daß die Beschleunigung der Ladung am Anfang und am Ende des betrachteten Zeitintervalls verschwindet, und daß sich die Geschwindigkeit der Ladung nicht stark ändert, ergibt sich

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\text{str}} = \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \ddot{v} \quad (17)$$

als Ausdruck für die Reaktionskraft der Strahlung.

Das gleiche Ergebnis hat LORENTZ auf anderem Wege erhalten. Es ist bekannt, daß die Kräfte, die an einem System beliebig bewegter Punktladungen auftreten, sich nicht zu Null ergänzen. LORENTZ stellt sich die bewegte Ladung nicht als Punktladung vor, sondern als kleine, homogen mit Raumladungen erfüllte Kugel und nimmt an, daß die MAXWELLSchen Gleichungen und das Kraftgesetz auch für das Innere der Kugel gelten. Die Summe der Teilkräfte, die an den einzelnen Ladungselementen auftreten, ergibt eine resultierende Kraft des eigenen Feldes. Diese „Selbstkraft“ steht mit der Reaktionskraft der Strahlung in engem Zusammenhang. Es zeigt sich, daß sie aus zwei Anteilen besteht, von denen der erste die Trägheitskraft der Masse darstellt, soweit diese elektromagnetischen Ursprungs ist, während der zweite die Reaktionskraft $\tilde{\mathfrak{F}}_{\text{str}}$ der Strahlung enthält.

Außer der elektromagnetischen Masse $m_{0\text{el}}$ ist auch noch eine mechanische Masse vorhanden, deren Trägheitskraft $m_{0\text{mech}} \ddot{v}$ der beschleunigenden äußeren Kraft $\tilde{\mathfrak{F}}_{\text{ext}}$ entgegenwirkt, so daß die Differentialgleichung der Bewegung die Form

$$m_{0\text{mech}} \ddot{v} + m_{0\text{el}} \ddot{v} - \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \ddot{v} = \tilde{\mathfrak{F}}_{\text{ext}} \quad (18)$$

annimmt. Der zweite und dritte Summand auf der linken Seite stellen die negativ genommene Selbstkraft $-\tilde{\mathfrak{F}}_{\text{s}}$ dar. Üblicherweise werden die Größen $m_{0\text{mech}}$ und $m_{0\text{el}}$ zur empirischen Ruhmasse m_0 zusammengefaßt. Gl. (18) ist eine Näherung, die nur für den Fall $v \ll c$ gilt, also keine relativistischen Korrekturen berücksichtigt. Diese Einschränkung gilt für alle folgenden Überlegungen.

9. Deutung der Leistung der Strahlungsreaktionskraft und eine neue Definition der Strahlungsleistung

Unser Ziel besteht darin, die Leistung der Selbstkraft, in der die Reaktionskraft der Strahlung enthalten ist, näher zu analysieren, um daraus einen Ausgangspunkt für eine neue Definition der Strahlungsleistung zu gewinnen. Der nächstliegende

Ansatz besteht darin, die Leistung der Reaktionskraft der Strahlung als Strahlungsleistung zu deuten, also

$$P = - \mathfrak{F}_{\text{str}} v = - \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} v \ddot{v} \quad (19)$$

zu setzen (vergl. dazu FEYNMAN [15, p. 28-7]). Diese Formulierung läßt jedoch den Zusammenhang mit der Definition der Strahlungsleistung als dem Hüllflächenintegral der Normalkomponenten des POYNTINGSchen Vektors vollkommen offen. Um diesen Zusammenhang herzustellen, wird der Energiesatz der MAXWELLSchen Theorie

$$\int_V \rho \mathfrak{E} v \, dV + \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathfrak{E}^2 + \mu_0 \mathfrak{H}^2) \, dV + \oint_A [\mathfrak{E} \times \mathfrak{H}] \, d\mathbf{a} = 0 \quad (20)$$

herangezogen. Wir wenden ihn an auf eine Hüllkugel, die die Ladung konzentrisch umgibt. Die LORENTZsche Kontraktion infolge der Bewegung der Ladung darf außer acht bleiben, da das Ziel der folgenden Überlegungen nicht in einer Bestimmung der elektromagnetischen Masse, sondern in einer Analyse der Leistung der Strahlungsreaktionskraft besteht. Die Ladung stellen wir uns als eine homogen mit Raumladungen erfüllte Kugel vor und folgen LORENTZ in der Annahme, daß die MAXWELLSchen Gleichungen auch für das Innere der geladenen Kugel gelten.

Bei der Auswertung der in (20) auftretenden Integrale ist es unzumutbar, die gebräuchliche Darstellung des Feldes einer bewegten Punktladung mit retardierten Größen als Ausgangspunkt zu verwenden. Eine Darstellung in gleichzeitig gemessenen Größen ist dafür weit besser geeignet. Jedoch ist eine geschlossene Form wie bei der hyperbolischen Bewegung im allgemeinen nicht mehr zu erreichen. Mit der Annahme, daß die Ungleichungskette

$$1 \gg \left| \frac{v}{c} \right| \gg \left| \frac{\dot{v}}{c^2} R \right| \gg \left| \frac{\ddot{v}}{c^3} R^2 \right| \gg \dots$$

(die Geschwindigkeit der Ladung soll klein gegen die Lichtgeschwindigkeit sein und sich nicht zu schnell ändern, der Aufpunkt liegt im Bereich des Nahfeldes $R \ll \lambda/2\pi$) gilt, werden die retardierten Größen mit Hilfe von TAYLORSchen Reihen durch gleichzeitige ersetzt. Durch Überlagerung der von den einzelnen Ladungselementen der geladenen Kugel hervorgerufenen Partialfelder gewinnt man eine im Innern und in der näheren Umgebung dieser Kugel gültige, für die Anwendung des Energiesatzes geeignete Darstellung des Feldes. Einzelheiten der Rechnung, die hier übergangen werden, findet man bei BAUSCH [16, p. 115...120]. Indem man in den Reihen nur Größen bis zur Ordnung c^{-3} berücksichtigt, erhält man für den ersten Summanden des Energiesatzes

$$\int_V \rho \mathfrak{E} v \, dV = - m_{0\text{el}} v \dot{v} + \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} v \ddot{v}, \quad (21)$$

also die Leistung der Selbstkraft (vergl. Gl. (18)). Für die zeitliche Änderung der elektromagnetischen Energie in der betrachteten Hüllkugel ergibt der zweite Summand der Gl. (20)

$$\frac{1}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathfrak{E}^2 + \mu_0 \mathfrak{H}^2) \, dV = m_{0\text{el}} v \dot{v} \left(1 - \frac{5}{12} \frac{a}{r} - \frac{1}{12} \frac{a^3}{r^3} \right) - \frac{Q^2}{18\pi \epsilon_0 c^3} v \ddot{v}, \quad (22)$$

wobei a den Radius der geladenen Kugel und $r \geq a$ den Radius der Hüllkugel bezeichnet. Bemerkenswerterweise geht der letzte Summand auf der rechten Seite in Gl. (22) aus dem Integral über das Innere der geladenen Kugel hervor. Ein Drittel der Leistung der Strahlungsreaktionskraft (vergl. Gl. (19)) dient also zur Änderung der Energie im Innern der Ladung. Dieses Ergebnis ist insofern überraschend, als man zu der Erwartung geneigt ist, die Leistung der Strahlungsreaktionskraft vollständig als Strahlungsleistung wiederzufinden.

Die Auswertung des Hüllflächenintegrals über die Normalkomponente des POYNTINGSchen Vektors vervollständigt die Energiebilanz in Gl. (20). Man erhält

$$\oint_A [\mathcal{E} \times \mathcal{H}] da = m_{0e1} v \ddot{v} \left(\frac{5}{12} \frac{a}{r} + \frac{1}{12} \frac{a^3}{r^3} \right) - \frac{Q^2}{9\pi \epsilon_0 c^3} v \ddot{v}. \quad (23)$$

Es liegt daher nahe, als Strahlungsleistung den letzten Summanden in Gl. (23) zu bezeichnen, also

$$P := - \frac{Q^2}{9\pi \epsilon_0 c^3} v \ddot{v} \quad (24)$$

zu setzen. Dadurch deuten wir denjenigen Anteil der Leistung der Strahlungsreaktionskraft als Strahlungsleistung, der durch die Oberfläche der Ladung in dem umgebenden Raum hinaustritt und nicht zur Beschleunigung der dort vorhandenen trägen Masse dient. Daß träge Masse nicht nur im Innern der Ladungskugel vorhanden ist, sondern auch im äußeren Feld, ist eine unmittelbare Folge der EINSTEINschen Äquivalenz zwischen Energie und Masse. Als Teil der Leistung der Strahlungsreaktionskraft ist die durch (24) definierte Strahlungsleistung unabhängig von der Art des gewählten Modells der Ladung (unabhängig von a und r). Auch für eine Punktladung hat sie den gleichen Wert.

Die Gleichung (24) ist als Definition zu werten. Sie unterscheidet sich von der Definition, die dem LARMORSchen Strahlungsgesetz in Gl. (16) zugrunde liegt, im wesentlichen dadurch, daß hier eine Hüllkugel im Nahfeldbereich zur Berechnung des Oberflächenintegrals der Normalkoordinaten des POYNTINGSchen Vektors verwendet wird. Außerdem wird hier der gleichzeitige Ort der Ladung als Mittelpunkt gewählt.

Die Definition der Strahlungsleistung in Gl. (24) ist durch eine Aufteilung der Leistung der Strahlungsreaktionskraft entstanden. Die hier vorgenommene Aufteilung ist jedoch nicht die einzig mögliche. Die Verbindung zum LARMORSchen Strahlungsgesetz kann man herstellen, indem man beachtet, daß für die Leistung der Strahlungsreaktionskraft

$$- \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} v \ddot{v} = \frac{Q^2}{6\pi \epsilon_0 c^3} \left\{ - \frac{d}{dt} (v \dot{v}) + \dot{v}^2 \right\} \quad (25)$$

gilt. Der erste Summand auf der rechten Seite beschreibt eine fluktuierende Aufnahme oder Abgabe von Energie, die sogenannte Beschleunigungsleistung. Bei einer periodischen Bewegung verschwindet sie im zeitlichen Mittel ebenso wie bei einer Bewegung, bei der die Beschleunigung nur während eines begrenzten Zeitintervalls von

Null verschieden ist. Der zweite Summand enthält einen irreversiblen Anteil, der stets größer als Null ist und dem LARMORSchen Gesetz entsprechend als Strahlungsleistung gedeutet wird:

Gegen diese Art der Aufteilung ist folgendes einzuwenden:

1. Sie nimmt keine Rücksicht auf den im Innern der Ladung verbleibenden Anteil der Leistung der Strahlungsreaktionskraft.
2. Bei der hyperbolischen Bewegung verschwindet die Strahlungsreaktionskraft (Gl. (17)). Die hyperbolische Bewegung ist gerade dadurch gekennzeichnet, daß die Beschleunigung der Ladung konstant ist. Hält man an der Aufteilung in Gl. (25) fest, so bedeutet dies, daß man annimmt, die hyperbolisch bewegte Ladung wirke wie ein Umformer, der Beschleunigungsleistung in Strahlungsleistung verwandelt ([8] p. 512 und [9] p. 356), ohne daß sich dafür im Feldbild des POYNTINGSchen Vektors der geringste Anhaltspunkt findet.
3. Bei der hyperbolischen Bewegung wird, wenn man das LARMORSche Gesetz akzeptiert, auch zum Zeitpunkt $t = 0$, dem Umkehrpunkt der Ladung, elektromagnetische Energie abgestrahlt, obgleich zu diesem Zeitpunkt das magnetische Feld und mit ihm der POYNTINGSche Vektor im ganzen Raum verschwindet.

Die in Gl. (25) vorgenommene Aufteilung der Strahlungsreaktionskraft ist daher zu verwerfen.

10. Die mittlere Strahlungsleistung

Mit der Strahlungsleistung, von der bisher die Rede war, ist stets der augenblickliche Energiefluß gemeint. In Gl. (24) wurde er definiert als die Leistung, die im Nahfeldbereich aus einer kleinen, um die Ladung gelegten Hüllkugel heraustritt oder in diese hineinwandert, je nachdem, ob Geschwindigkeit v und Ruck \ddot{v} entgegengesetzt oder gleich gerichtet sind. Dabei ist die bewegte Ladung stets Mittelpunkt der Hüllkugel.

Diese Definition der augenblicklichen Strahlungsleistung bietet keinen unmittelbaren Zugang zur mittleren Strahlungsleistung. Das zeitliche Mittel des in Gl. (24) definierten augenblicklichen Energieflusses gibt den Mittelwert der Leistung an, die durch die Oberfläche einer mit der Ladung mitgeführten Hüllkugel tritt, die also bei einer periodischen Bewegung mit der Ladung oszilliert. Offenbar entsteht so keine sinnvolle Definition der mittleren Strahlungsleistung. Der praktischen Messung entsprechend wird man vielmehr eine hinreichend große, raumfeste Hüllkugel zugrunde legen und verlangen, daß sich die Ladung während der Messung nicht wesentlich vom Mittelpunkt entfernt.

Mit dieser Forderung ergibt sich, daß zu der in Gl. (24) definierten Strahlungsleistung noch ein Summand hinzutritt, der der Auswanderung der Ladung aus dem Mittelpunkt der Kugel proportional ist. Für eine sinusförmig oszillierende Ladung ergibt sich so der wohlbekannte Wert der mittleren Strahlungsleistung eines HERTZschen Dipols, der bisher stets aus dem LARMORSchen Gesetz abgeleitet wurde. Einzelheiten findet man in [16, p. 125...128].

Damit hat sich die Erwartung erfüllt, daß das LARMORSche Gesetz für periodische Bewegungen zu einer richtigen Aussage führt. Offenbar läßt sich dieses Ergebnis noch etwas verallgemeinern. Die hier vorgetragene Kritik berührt Aussagen über die mittlere Strahlungsleistung dann nicht, wenn sie sich auf eine Spektrallinie oder einen engen Spektralbereich einer Ladungsbewegung beziehen, die sich nach FOURIER durch eine Summe oder ein Integral sinusförmiger Schwingungen darstellen läßt. Zu dieser Gruppe zählen alle Ladungsbewegungen, bei denen sich die Ladung nicht beliebig weit vom Ausgangspunkt entfernt. Die Kritik betrifft allein im wesentlichen monotone Bewegungen, bei denen der Begriff der mittleren Strahlungsleistung seinen Sinn verliert, da die Ladung jede Hüllkugel mit beliebig großem, jedoch endlichem Radius im Laufe ihrer Bewegung durchstößt und verläßt.

11. Zusammenfassung

Im Bereich der beschleunigten Ladungsbewegungen besitzt nur die hyperbolisch bewegte Ladung im mitgeführten Bezugssystem ein elektrostatisches Feld. Durch Transformation auf das der Bewegung zugrunde liegende Inertialsystem ergibt sich eine Darstellung des Feldes in gleichzeitig gemessenen Größen. Diese Darstellung des Feldes zeigt, daß die Anwendung des LARMORSchen Strahlungsgesetzes auf die hyperbolische Bewegung auf einen Widerspruch führt. Da man für jeden Zeitpunkt der Bewegung eine Hüllfläche angeben kann, aus der keine Energie abwandert, sendet die hyperbolisch bewegte Ladung keine Strahlung aus.

Damit wird eine neue Definition des Begriffes Strahlungsleistung notwendig. Eine Analyse der Leistung der Strahlungsreaktionskraft legt es nahe, die augenblickliche Strahlungsleistung als denjenigen Bestandteil des aus der Oberfläche der Ladung austretenden Energieflusses zu definieren, der nicht zur Beschleunigung der im Nahfeld konzentrierten und mit Masse behafteten Energie dient. Für eine periodische Ladungsbewegung stimmt die mittlere Strahlungsleistung mit dem nach dem LARMORSchen Gesetz berechneten Wert überein.

Summary

The uniformly accelerated motion of an electric charge is the only one among all accelerated motions with an electrostatic field in the rest system of the charge. The transformation of this into that system of inertia, in which the motion takes place, results in a description of the field in simultaneously measured coordinates. This representation contradicts LARMOR's law of radiation when applied to the hyperbolic motion. For any instant of the motion there is a closed surface with no energy flow out through it. Therefore a uniformly accelerated charge does not radiate energy.

Thus a new definition of the concept of radiated power is necessary. Analysing the power of the force of radiation-reaction leads to the following definition: The

instantaneously radiated power is that part of the energy flow out of the surface of the charge, which is not needed for the acceleration of the energy concentrated near the charge and being equivalent to a mass.

The mean radiated power, calculated on the basis of this definition for the periodic motion of a charge, is in agreement with LARMOR's law of radiation.

Literatur

- [1] Sommerfeld, A.: Vorlesungen über Theoretische Physik, Band III, Elektrodynamik, Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig, Leipzig 1961, 3. Auflage.
- [2] Born, M.: Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzips, *Annalen der Physik*, Folge IV, **30**, 1909, p. 1–56.
- [3] Pauli, W.: Relativitätstheorie in *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften*, Teubner 1921.
- [4] Schott, G. A.: *Electromagnetic Radiation*, Cambridge 1921.
- [5] Milner, S. R.: Does an Accelerated Electron necessarily Radiate Energie on the Classical Theory? *Phil. Mag. Ser. 6*, **41**, 1921, p. 405–419.
- [6] Drukey, D. L.: Radiation from an Uniformly Accelerated Charge, *Annals of Physics* **76**, 1949, p. 543, 544.
- [7] Bondi, H., Gold, T.: The Field of an Uniformly Accelerated Charge, with special Reference ... *Proc. Roy. Soc. A* **299**, 1955, p. 416–424.
- [8] Fulton, T., Rohrlich, F.: Classical Radiation from an Uniformly Accelerated Charge, *Annals of Physics*, **9**, 1969, p. 499–517.
- [9] Synge, J. L.: *Relativity: The special Theory*, North-Holland 1965, 2. Auflage, p. 421 bis 424.
- [10] Arzeliès, H.: *Rayonnement et Dynamique du Corpuscule charge fortement accelere*, Gauthier-Villars 1966, p. 97–100.
- [11] Møller, C.: *Theory of Relativity*, Oxford University Press 1952.
- [12] Møller, C.: On homogenous Gravitational Fields in the General Theory of Relativity and the Clock Paradox, *Det. Kgl. Danske Viedenskabernes Selskab Mat.-Fys. Medd.*, **20**, 1943, Nr. 19.
- [13] Whittaker, E. T.: On Electric Phenomena in Graviational Fields, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **116**, 1927, p. 720–7365.
- [14] Copson, E. T.: On Electrostatic in a Gravitational Field, *Proc. Roy. Soc. (London) A* **118**, 1928, p. 184–194.
- [15] Feynman, R. P., Leighton, R. B., Sands, M.: *The Feynman Lectures on Physics. Volume II; The Electromagnetic Field*, Addison-Wesley Publishing Company 1964.
- [16] Bausch, H.: *Das erste Coulombsche Gesetz als Grundlage der Elektrodynamik*, Dissertation an der Technischen Universität Hannover 1968.