

# Nichtglatte dynamische Systeme - Beispiele und Analysemethoden -

Popp, Karl

Veröffentlicht in:  
Jahrbuch 1999 der Braunschweigischen  
Wissenschaftlichen Gesellschaft, S.73-77



J. Cramer Verlag, Braunschweig

KARL POPP, Neustadt/Nds.

## **Nichtglatte dynamische Systeme - Beispiele und Analysemethoden -**

Baunschweig, 05.11.1999\*

### **1. Motivation**

Nichtglatte dynamische Systeme gewinnen im Ingenieurbereich und anderen Anwendungswissenschaften zunehmend an Bedeutung. In mechanischen Systemen führt die Berücksichtigung von Reibungs- und Stoßeffecten zu un stetigen Kennlinien in den Modellgleichungen. Auch in der Beschreibung elektrischer Schaltkreise und neuronaler Netze treten nichtglatte Phänomene durch Schalterfunktionen bzw. Potentialentladungen auf. Schon sehr einfache niedrigdimensionale mathematische Modelle weisen eine komplexe nichtglatte Dynamik auf. Die klassischen Methoden zur Analyse dynamischer Systeme sind auf solche Modelle in der Regel nicht anwendbar. Über die Einbettung un stetiger Differentialgleichungen in die Theorie der Differentialinklusionen lassen sich Erkenntnisse über die Existenz- und Eindeutigkeit, sowie die Stabilitätseigenschaften von Lösungen solcher Systeme gewinnen. Bei komplexeren Systemen unter Nebenbedingungen, wie z. B. Mehrkörperprobleme, kann die Theorie der Linearen Komplementarität nutzbringend angewendet werden. Probleme der Verzweigungstheorie und Berechnung von Attraktoren sind aktuelle Fragen in der Forschung. Auch im Bereich der numerischen Lösung un stetiger Differentialgleichungen sind in den vergangenen Jahren wesentliche Fortschritte erzielt worden.

Zusammenfassende Darstellungen über nichtglatte Systeme finden sich in [1] bis [7]. Spezielle Fragen der Numerik, Optimierung und Verzweigungstheorie werden in [8], [9] bzw. [10] angesprochen.

### **2. Beispiele**

Die Vielzahl der Beispiele nichtglatter Systeme läßt sich im Hinblick auf technische Anwendungen in zwei Hauptgruppen einteilen. Systeme mit Stößen und Systeme mit Reibung. Fig. 1 zeigt eine Zusammenstellung einfacher Stoßprobleme mit den zugehörigen mechanischen Modellen. Eine ausführliche Beschreibung entsprechender technischer Fragestellungen findet sich in [4].

Die trockene Reibung tritt in der Natur in zwei grundsätzlich unterschiedlichen Formen auf:

- Als Widerstand gegen den Beginn einer Bewegung aus der Ruhe heraus (Haftreibung). Die zugehörige Reibungskraft ist eine Reaktionskraft.
- Als Widerstand gegen eine vorhandene Bewegung (Gleitreibung). Die zugehörige Reibungskraft ist eine eingeprägte Kraft.

---

\* Vortrag in der Klasse der Ingenieurwissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft.

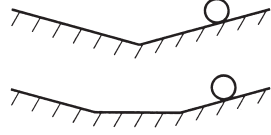
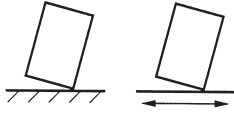

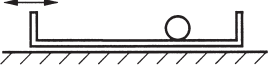
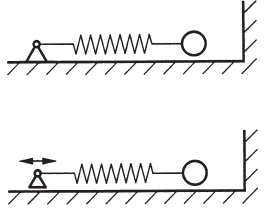
Schwinger mit Stößen	Mechanisches Modell
1. Schwinger mit stückweise konstanter Rückführkraft ohne und mit Totbereich	
2. Schwingender Klotz ohne und mit Fremderregung	
3. Springball mit harmonischer oder zufälliger Fremderregung	
4. Fremderregter Schwinger mit Spiel und Stößen	
5. Stoßschwinger ohne und mit Fremderregung	

Fig. 1: Schwingungsprobleme mit Stößen

Fig. 2 zeigt eine Auflistung von Schwingungsproblemen mit Reibung einschließlich der zugehörigen mechanischen Modelle. Dabei können die beiden genannten Phänomene in einem Schwinger zeitlich nacheinander auftreten und zu Haft-Gleit-Zuständen mit nicht-glaten Übergängen führen. Einzelheiten findet man in [4].

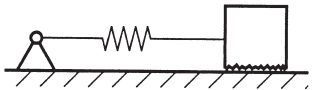
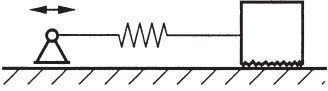
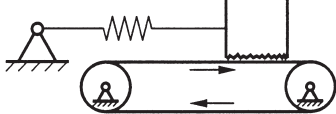
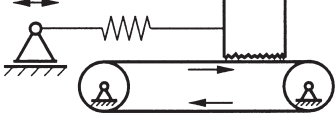
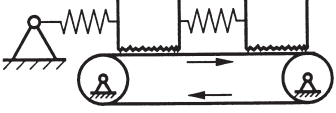
Schwinger mit Reibung	Mechanische Modelle
1. Reibungsschwinger ohne Erregung	
2. Reibungsschwinger mit Fremderregung	
3. Reibungsschwinger mit Selbstbewegung	
4. Reibungsschwinger mit Selbst- und Fremderregung	
5. Reibungsschwinger mit mehreren Freiheitsgraden	

Fig. 2: Schwingungsprobleme mit Reibung

### 3. Analysemethoden

Die Analyse nichtglatter Systeme kann grundsätzlich signalgestützt (z. B. durch Auswertung von Zeitreihen) oder modellgestützt auf der Basis einer zeitdiskreten oder zeitkontinuierlichen mathematischen Beschreibung erfolgen. Beschränkt man sich auf eine

zeitkontinuierliche Darstellung durch gewöhnliche Differentialgleichungen im Zustandsraum und betrachtet zwei unterschiedliche zustandsabhängige Schaltzustände  $p$  und  $q$  des Systems, z. B. Haften oder Gleiten, so umfaßt die Beschreibung nichtglatter Systeme folgende Bestandteile [11]:

- 1) Eine Beschreibung der glatten Systeme für jeden Schaltzustand.
- 2) Eine Indikatorfunktion, die das Auftreffen auf die Schaltfläche im Zustandsraum anzeigt und den zugehörigen Umschaltzeitpunkt für den nichtglatten Übergang definiert.
- 3) Eine Transitionsbedingung, die angibt, wie der Übergang von einem Schaltzustand zum anderen erfolgt.

Somit gilt:

- 1) Vor dem Umschalten ( $t < t^*$ ):

$$\dot{z} = f_p(z), \quad z(t_0) = z_0, \quad f_p \in C^1. \quad (1)$$

Nach dem Umschalten ( $t > t^*$ ):

$$\dot{z} = f_q(z), \quad z(t_+^*) = z_+, \quad f_q \in C^1. \quad (2)$$

- 2) Schaltfläche  $S_p$  und Indikatorfunktion  $h_p$

$$S_p = \{ z \in \mathbb{R}^n \mid h_p(z) = 0 \}. \quad (3)$$

- 3) Transitionsbedingung

$$z(t_+^*) = u_{pq} [ z(t_-^*) ]. \quad (4)$$

Für nichtglatte Systeme mit einer Sequenz gleichartiger Umschaltungen (z. B. vom Haften zum Gleiten) hat sich eine ereignisgesteuerte Abbildung bewährt, bei der die entsprechenden Zustände in der Schaltfläche aufeinander abgebildet werden. Die Analysemethoden hängen im einzelnen von der gewählten Beschreibungsart ab, die Ergebnisse (z. B. die Ljapunov-Exponenten) lassen sich jedoch ineinander überführen, vgl. [11].

### Literatur

- [1] MOREAU, J. J.; PANAGIOTOPOULOS, P. D. (Eds.): Nonsmooth mechanics and applications. CISM Courses and Lectures No 302. Springer, Wien 1988.
- [2] PFEIFFER, F.; GLOCKER, CH.: Multibody dynamics with unilateral contacts. John Wiley & Sons, New York 1996.
- [3] BROGLIATO, B.: Nonsmooth impact mechanics. Lecture Notes in Control and Information Sciences 220. Springer, London 1996. 2nd Edition, 1999.

- [4] POPP, K.: Non-smooth mechanical systems - an overview. *Forschung im Ingenieurwesen* 64, 1998, pp. 223-229.
- [5] KUNZE, K.: Non-smooth dynamical systems. Habilitationsschrift. University at Cologne, 1998.
- [6] MOON, F. C. (Ed.): New applications of nonlinear and chaotic dynamics in mechanics. Proceedings of the IUTAM-Symposium held in Ithaca, NY, July 27 - August 1, 1997. Kluver Acad. Publ., Dordrecht 1999.
- [7] PFEIFFER, F.; GLOCKER, CH. (Eds.): Unilateral multibody contacts. Proceedings of the IUTAM-Symposium held in Munich, August 3-7, 1998,. Kluver Acad. Publ., Dordrecht 1999.
- [8] LEMPIO, F.; VELIOV, V.: Discrete approximations of differential inclusions. *Bayreuther Mathematische Schriften* 54, 1998, pp. 1-83.
- [9] HILDING, D.; KLARBRING, A.; PETERSSON, J.: Optimization of structure in unilateral contact. *Appl. Mech. Rev.* 52, No. 4, 1999, pp. 139-160.
- [10] LEINE, R. I.; VAN DER VRANDE, B. L.; VAN CAMPEN, D. H.: Bifurcations in nonlinear discontinuous systems. Report WFW 99.010, Eindhoven University of Technology 1999.
- [11] OESTREICH, M.: Untersuchung von Schwingern mit nichtglatten Kennlinien. Dr.-Ing. Diss. Univ. Hannover. *Fortschr. Ber. VDI R.* 11, Nr. 258. VDI-Verlag, Düsseldorf 1998.

---

Prof. Dr.-Ing. Karl Popp  
Sauerbruchweg 49  
D-31535 Neustadt/Nds.