

Die vier Elemente Feuer – Wasser – Erde – Luft

Ziegler, Heinz

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 64, 2011, S.9-22



J. Cramer Verlag, Braunschweig

Die vier Elemente Feuer – Wasser – Erde – Luft*

HEINZ ZIEGLER

Campestraße 1, D-38102 Braunschweig

Zusammenfassung

Zu den vier Elementen, die Platon im Dialog 'Timaios' postuliert hat, ist über die Jahrhunderte hinweg viel publiziert worden und zwar von Autoren unterschiedlichster Provenienz. Die Literatur ist derart umfangreich, daß nur ein Bruchteil herangezogen werden konnte, um die wichtigsten Ansichten zum Thema Elementaufbau zu referieren. Es erweist sich, daß den Platonischen Zahlenangaben häufig nicht die erforderliche Aufmerksamkeit geschenkt wurde. Platon nennt dasjenige Dreieck, das er als „Urbaustein“ oder „Urdreieck“ ansieht, explizit das „schönste“ und konstruiert mit ihm drei der vier Elemente (Feuer, Wasser und Luft). Mit der Würdigung seiner eigentümlichen „Schönheit“ wird eine neue These über die Bedeutung dieses tatsächlich einzigartigen Dreiecks für Platons Konstruktion zur Diskussion gestellt.

Wenn heute von den vier Elementen bei Platon gesprochen wird, so ist jedem von uns bekannt, daß es sich dabei um die von ihm postulierten mathematischen Körper, d.h. um reguläre Polyeder handelt. Als Elemente finden sich Erde, Wasser, Luft und Feuer schon bei Empedokles (483/82–424/23), und sie spielen eine höchst beachtliche Rolle im Rahmen der europäischen Kultur – bis in unsere Zeit!

„Unter den Dialogen Platons nimmt der 'Timaios' in mehrfacher Hinsicht eine Sonderstellung ein. In keinem anderen Dialog Platons wird eine solche Fülle naturwissenschaftlicher Lehren ausgebreitet. [...] Der 'Timaios' galt schon in der Antike als ein ungemein schwieriger, erklärungsbedürftiger Dialog. Bekanntlich hat bereits Krantor, ein Schüler des Xenokrates und somit ein Vertreter der zweiten Schülergeneration nach Platon, einen Kommentar zu diesem Dialog verfaßt“.¹

* (Eingegangen 15.02.2012). Vorgelegt von Thomas Sonar.

¹ Theodor Ebert, Von der Weltursache zum Weltbaumeister, in: Antike und Abendland, 37., 1991, S. 43–54, hier S. 43.

In der Geschichte der Interpretation des 'Timaios' sind vor allem zwei Ansätze verfolgt worden, die ihre Fruchtbarkeit einerseits für die Theologie, andererseits für die Naturwissenschaften hatten. Beide Ansätze, denen gemäß der 'Timaios' als das zugleich mythische und mathematisch-naturphilosophische Hauptwerk des späten Platon galt, sind entsprechend zur berücksichtigen.²

Für die antiken Naturphilosophen sind die Elemente Grundbestandteile oder Grundstoffe überhaupt, aber bei Platon sind sie als Polyeder ihrerseits zusammengesetzt. Er konstruierte ihre Flächen aus rechtwinkligen Dreiecken, die von der Forschung auch als „Urdreiecke“ oder „Grundbauteile“ bezeichnet werden. Die fünf regelmäßigen Körper, deren „Theorie von Theaitet unter den Augen Platons systematisch ausgebaut“ und abgeschlossen wurde, nennen wir „Platonische Körper“, weil im 'Timaios' alle Stoffe auf atomare Tetraeder, Oktaeder, Ikosaeder und Hexaeder zurückgeführt werden und das Dodekaeder mit der Gesamtform des Kosmos in Verbindung gebracht wird.³ Das Dodekaeder, das sich von den anderen regulären Polyedern darin unterscheidet, daß man seine Begrenzungsflächen nicht mit rechtwinklig-ungleichschenkligen oder rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecken (wie beim Würfel) aufbauen kann – es sind vielmehr gleichseitige Fünfecke –, bleibt den Göttern für andere Zwecke reserviert.⁴

Das Dodekaeder ist von Platon auch nicht Element genannt worden! Erst spätere Erklärer schreiben das Dodekaeder dem Äther zu, der von Platon nur als reinster Teil der Luft gedacht wird. Das Dodekaeder, das nach Ansicht des Proklos und der Modernen die Form des Ätheratoms sein soll, wird von Platon mit einer geheimnisvoll-unpräzisen Formulierung 'dem All' zugewiesen.⁵ Platons Andeutungen bezüglich des Dodekaeders haben im Altertum eine ganze Litera-

² Norbert Fischer, Die Ursprungsphilosophie in Platons „Timaios“, in: Philosophisches Jahrbuch, 89. Jg., 1982, S. 247–268, hier S. 249.

³ Konrad Gaiser, Platons Zusammenschau der Mathematischen Wissenschaften, in: Antike und Abendland. Beiträge zum Verständnis der Griechen und Römer und ihres Nachlebens, Bd. 32, 1986, S. 89–124, hier S. 96. Ausführlich zu diesem Thema berichtet Kurt von Fritz, Platon, Theaitet und die antike Mathematik, 2. Auflage als Neudruck mit einem Nachtrag, Darmstadt 1969, S. 31 ff.: „Endlich erwähnt Platon noch, daß es außer diesen vier regelmäßigen Körpern nur noch einen fünften gibt, dessen Aufbau er aber nicht beschreibt und den er auch eigentlich nicht brauchen kann, da er nur vier Elemente hat. Aus der ganzen Darstellung geht mit aller Deutlichkeit hervor, daß Platon wußte, daß es fünf und nur fünf regelmäßige Körper gibt, und dies um so mehr, als er den fünften nur gezwungen mit in Kauf nimmt.“

⁴ Hermann Gaus, Philosophischer Handkommentar zu den Dialogen Platons, 3. Teil, 2. Hälfte, Bern 1961, S. 204.

⁵ Eva Sachs, Die fünf Platonischen Körper. Zur Geschichte der Mathematik und der Elementenlehre Platons und der Pythagoreer (Philologische Untersuchungen, 24. Heft), Berlin 1917, S. VII. – Im Text (Timaios 58d) heißt es zum Begriff Luft: Ihre durchsichtigste Art erhält den besonderen Namen „Äther“, die trübste heißt „Nebel“ und „Undurchsichtigkeit“.

tur hervorgerufen, und Eva Sachs schreibt dazu: „Ob Platon damit den Tierkreis gemeint hat, wie Plutarch und andere Ausleger glauben, ist nicht zu entscheiden. Er hat in Wahrheit den fünften Körper nur erwähnt, weil er ihn als fünften nicht weglassen mochte.“⁶

Dieser fünfte Körper hat bei Platon keine Unterteilung und ist von ihm auch nicht mathematisch behandelt worden – mit den beiden von Platon ausgewählten „Urdreiecken“ ist die Konstruktion des Dodekaeders jedenfalls nicht möglich! Es ist ein Irrtum, wenn es heißt, „Platon konstruiert seine fünf regulären Körper mit Hilfe von zwei Dreiecken [...]. Eines davon gilt 'als das schönste aller Dreiecke'“.⁷

Platons 'Timaios', verfaßt vor 347 v. Chr., handelt von dem was „von Natur aus ist“, von der Entstehung und Wirklichkeit des Kosmos. Dieser Text gilt – neben der 'Politeia' – als der wirkungsgeschichtlich bedeutendste Dialog Platons. Der Mathematiker-Philosoph Whitehead, der den 'Timaios' und Newtons Scholium zusammenstellt, bezeichnet die beiden Dialoge als die beiden großen kosmologischen Urkunden, die das abendländische Denken bestimmt haben.⁸

⁶ Anm. wie vorh., S. 47 f.

⁷ Michael Toepell, Platonische Körper in Antike und Neuzeit, in: Der Mathematikunterricht, Jg. 37, Heft 4, 1991, Platonische Körper – Unterricht und Geschichte, S. 51. Die irrtümliche Auffassung findet sich auch bei anderen Autoren. So auch in der Jubiläumsausgabe sämtlicher Werke von Platon zum 2.400. Geburtstag, 1974 Zürich, Bd. VI, Platon Spät-dialoge II, eingeleitet von Olof Gigon. Auf Seite XLIII schreibt Gigon: „Drei Elemente, so hören wir 54 C, sind aus ungleichschenkligen Dreiecken aufgebaut, das vierte aus gleichschenkligen. Wichtiger aber ist, daß sich fünf regelmäßige Körper als Zusammen-setzungen aus solchen Ur-Dreiecken konstruieren lassen; es sind die berühmten fünf platonischen Körper: der Kubus, das Oktaeder, das Dodekaeder, das Ikosaeder und die Pyramide“. – Bei Hans-Georg Gadamer, Idee und Wirklichkeit in Platos ›Timaios‹. Vortrag gehalten vor der Heidelberger Akademie der Wissenschaften am 10. November 1973, Erstdruck in: Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Philosoph.-histor. Klasse, Heidelberg 1974. Neudruck in: Gesammelte Werke, Bd. 6, Tübingen 1985, S. 265. „Es sind die fünf platonischen Körper, und diese sind konstruierbar aus zwei ausgewählten Vorzugstypen von Dreiecken“. – Das Dodekaeder besteht aus zwölf regelmäßigen Fünfecken, und diese Fünfecke lassen sich im Gegensatz zu den vier Elementen, die aus rechtwinkligen Dreiecken zusammengefügt sind, nicht in gleiche und ähnliche, also kongruente Teile zerlegen. Ausführlich hierzu: Fritz Krafft, Geschichte der Naturwissenschaft I. Die Begründung einer Wissenschaft von der Natur durch die Griechen, Freiburg 1971, S. 336 ff. – Die Dodekaederflächen, also die Fünfecke, lassen sich zwar auch mittels rechtwinkliger Dreiecke darstellen, aber eben nicht mit den „schönsten Dreiecken“, sondern mit 10 ungleichschenkligen, wobei neben dem rechten Winkel der eine 36° und der andere 54° beträgt!

⁸ Paul Friedländer, Platon, Bd.1, Seinswahrheit und Lebenswirklichkeit, 3. durchgesehene und ergänzte Auflage, Berlin 1964, S. 261. – „Kein Werk Platons, ja, keine andere Prosaschrift überhaupt, hat in der Antike größere Bedeutung gehabt als der Timaios – und das, obschon dieser Dialog als ‚dunkel‘ galt“. Vgl. hierzu Heinrich Dörrie, Der Platonismus in der Antike, Bd. 3, Der Platonismus im 2. und 3. Jahrhundert nach Christus, Stuttgart – Bad Cannstadt 1993, S. 209.

Lothar Schäfer schreibt in „Platon über Natur und Staat“, der 'Timaios' sei der einzige Dialog Platons, der durch die Jahrhunderte hindurch immer gelesen und kommentiert wurde. Dennoch habe man ihn oft als Fremdkörper im Œuvre empfunden und sogar als neupythagoreische Schrift gedeutet.⁹ Fest steht, dass „Platons Dialog 'Timaios' philosophie- und wissenschaftsgeschichtlich von außerordentlicher Bedeutung ist, weil er fast der einzige Text ist, der von den Dialogen Platons durchgängig in Europa den Gelehrten bekannt war“.¹⁰

Walter Burkert bemerkte zu den Platonischen Körpern in seinem Vortrag anlässlich der Verleihung der Carl-Friedrich Gauß - Medaille in Braunschweig (1982):

„Den kühnsten Entwurf, wie die Gesamtheit unserer Welt geometrisch gestaltet sei, hat er in seinem naturphilosophischen Dialog 'Timaios' vorgelegt. Demnach werde die ungeformte Materie, die 'Amme des Werdens', die praktisch mit dem Raum identisch ist, dadurch zur körperlichen Wirklichkeit gestaltet, daß sie im kleinsten Bereich zunächst durch Dreiecksflächen begrenzt wird, die sich ihrerseits wieder zu gleichseitigen Dreiecken oder Quadraten zusammensetzen, aus denen dann die regulären Körper aufgebaut werden, Tetraeder Würfel Oktaeder Ikosaeder; diese konstituieren als Korpuskeln, als teilbare Atome sozusagen, die Elemente Feuer Erde Luft und Wasser; der fünfte reguläre Körper, das Dodekaeder, anders aufgebaut, nämlich aus Fünfecken, und scheinbar überschüssig im System der Elemente, wird mit einer geheimnisvoll-unpräzisen Formulierung 'dem All' zugewiesen. Diese bizarre, unverifizierbare und willkürliche Konstruktion hat schon im Altertum viel Kopfschütteln hervorgerufen“.¹¹

Mit dem vorliegenden Beitrag über die vier Elemente, die Platon in seinem Spätwerk postulierte, soll auf die Zahlenverhältnisse der regulären Polyeder hingewiesen werden, die er als Elemente einsetzte. Es ist nämlich erstaunlich, daß Publikationen aus heutiger Zeit mit falschen Zahlenangaben aufwarten, die zu wesentlichen Irrtümern führen, weil die Angaben für die „Urdreiecke“ in Platons Text unberücksichtigt blieben. Wenn darin auch manche Passagen un-

⁹ Lothar Schäfer, Das Paradigma am Himmel. Platon über Natur und Staat, Freiburg/ München, 2005, S. 2. – Daß es sich um eine neupythagoreische Schrift handelt, ist aus heutiger Sicht nicht mehr zu vertreten. Der kosmologische Traktat Timaios ist im wesentlichen ein Monolog und spricht über die Erschaffung der Welt bis zur Entstehung des Menschen. Rafael Ferber, Platon, Philosophie jetzt!, Hg. Peter Sloterdijk, München 1997, S. 55.

¹⁰ Gernot Böhme/Hartmut Böhme, Feuer, Wasser, Erde, Luft. Eine Kulturgeschichte der Elemente, München 1996, S. 100.

¹¹ Walter Burkert, Konstruktion und Seinsstruktur: Praxis und Platonismus in der griechischen Mathematik, in: Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Bd. XXXIV, 1982, S. 125–141, hier S. 130.

verständlich sind, kann doch nicht behauptet werden: „Plato nahm das Messen aus der Geometrie heraus“.¹² Um es gleich vorweg zu sagen: Die eigentliche Erzählung, die den Timaios zum Sprecher hat, enthält keinerlei szenische Unterbrechung und liest sich auf weite Strecken wie eine Abhandlung.

„Freilich, der Ton, in dem hier erzählt wird, ist eigentümlich, und der Wahrheitsanspruch, der für die Erzählung erhoben wird, beschränkt sich ausdrücklich auf den Bereich des Wahrscheinlichen, mag es sich dabei um Erzählung handeln (Mythos) oder um rationale Argumente (Logos). So stellt sich in der Tat das methodische Problem, den Sachgehalt der Erzählung und insbesondere ihre rationalen Motive aus einer Erzählweise herauszulesen, die eigentümlich locker, inkohärent und anspielungsvoll wie ein Märchen ist“.¹³

Zur Konstruktion und Erklärung bediente sich Platon der Sprache der Mathematik und ihrer Gesetzmäßigkeiten. Für ihn war „alle Naturwissenschaft nur so weit Wissenschaft, als sie Mathematik ist“.¹⁴

„Die Hinordnung der Zahlenlehre auf die Geometrie dürfte hinreichend klar sein. Die Geometrie führt uns in den Bereich des Idealen – im Sinne Platons. Die Zahlenlehre leistet dazu Hilfestellung. Der griechische Zahlenbegriff, der nur die ganzen Zahlen einschließt, läßt überall nach ganzen Zahlen und ihren Verhältnissen forschen, auch in der Geometrie. Das geht soweit, daß die Zahlen eingeteilt werden, ob sie den Flächeninhalt eines Quadrates oder lediglich eines Rechtecks angeben“.¹⁵

Zur Formung der Elemente benutzt Platon zwei rechtwinklige Dreiecke für die Flächen der Polyeder, wobei das ungleichschenklige Dreieck als „schönstes Dreieck“ bezeichnet wird; und dazu folgt die Erklärung, daß diese Dreiecksform einzigartig sei. Die beiden Dreiecke, wovon das schönste rechtwinklig-ungleichschenklige und das andere rechtwinklig-gleichschenklige ist, sind die Elementarteilchen, die als „Urdreiecke“ oder „Grundbausteine“ bezeichnet werden.¹⁶

¹² Lancelot Hogben, *Mathematik für alle: Einführung in die Wissenschaft der Zahlen und Figuren*, Köln 1985, S. 14. Der Text zu den Elementen ist hier völlig abstrus und die Abbildungen dazu sind schlichtweg falsch.

¹³ Hans-Georg Gadamer, wie Anm. 7, S. 244 f.

¹⁴ Eva Sachs, wie Anm. 5, S. VII.

¹⁵ Wilhelm Ettelt, *Mathematische Beispiele bei Platon*, in: *Gymnasium, Zeitschrift für Kultur der Antike und humanistische Bildung*, Bd. 68, Heidelberg 1961, S. 124–145, hier S. 138.

¹⁶ Zitiert wird folgend aus der Übersetzung von Hans Günter Zekl, *Platon: Timaios* (Philosophische Bibliothek, Bd. 444), Hamburg 1992, der den griechischen Text: *Platonis opera. Tomus IV Tetralogiam VIII continens*. Ed. Joannes Burnet. Oxford 1902, benutzte, hier 54a.

(54a) „Von den zwei Dreiecksformen also hat die gleichschenklige eine einzige Art erhalten, die ungleichseitige dagegen unendlich viele. Wir müssen also wieder von den unzähligen die schönste auswählen, wenn wir den Anfang sachgemäß nehmen wollen. Wenn nun jemand eine schönere auswählen und vorbringen kann zur Zusammensetzung dieser, so ist der nicht unser Feind, sondern soll im Siege unser Freund sein“.

Welch enorme Bedeutung für Platon das rechtwinklig-ungleichschenklige Dreieck, also das „schönste“ und einzige in dieser Art hat, ist unmißverständlich aus dem anschließenden Text zu entnehmen.

(54a) „So setzen wir also von den vielen Dreiecksformen als schönste eine einzige (die anderen übergehen wir), nämlich die, aus deren Paar als Drittes das gleichseitige Dreieck besteht. Weshalb wir das tun, wäre eine längere Erklärung; doch wer das widerlegen kann und nachweisen, daß es nicht so ist, für den ist ein Freundespreis ausgesetzt. – Es seien also ausgewählt zwei Dreiecksformen, aus denen der Feuerkörper wie auch die der anderen Grundstoffe hergestellt sind, einerseits das gleichschenklige, andererseits dasjenige, welches die größere Seite im Quadrat dreimal so groß hat wie die kleinere.

(54d) „Es soll also den Anfang bilden die erste Art, die kleinste in ihrem Zusammentritt; ihr Grundbaustein ist die Dreiecksform, welche ihre Grundlinie doppelt so groß wie die kleinere Seite hat. Zwei davon, entlang der Grundlinie zusammengelegt und dies dreimal hintereinander gemacht, wobei die entstandenen Durchmesser und die kurzen Seiten an einer Stelle wie in einem Stichpunkt zusammenstoßen, so ist ein gleichseitiges Dreieck aus diesen ursprünglich sechsen entstanden“.

Für die Erschaffung des gleichseitigen Dreiecks werden demnach 6 „schönste“ Dreiecke gebraucht, bei der die Grundlinie doppelt so groß wie die kleinere Seite ist – und die größere Seite (große Kathete) im Quadrat dreimal so groß wie die kleinere.¹⁷ Nachweisbar sind die sechs Grundbausteine („Urdreiecke“) auch aus dem weiteren Text. So besteht das Ikosaeder „aus zweimal sechzig solcher zusammengefügter Grundbausteine und 12 Raumwinkeln, deren jeder von fünf

¹⁷ Walter Bröcker, *Platos Gespräche*, 3. Aufl., Frankfurt/Main 1985, S. 517: „Vielmehr bauen diese Flächen sich auf aus gewissen Urdreiecken, das Quadrat aus gleichschenklighrechtwinkligen Dreiecken, und das gleichseitige Dreieck aus rechtwinkligen Dreiecken, deren eine Kathete doppelt so lang ist wie die andere“. – Richtig ist: Die Grundlinie des rechtwinklig-ungleichseitigen („schönsten“) Dreiecks ist die Hypotenuse des „Urdreiecks“ und diese ist doppelt so lang wie die kleine Kathete! (54d). – Vgl. Abbildung in der Anlage am Schluß.

gleichseitigen Dreiecksflächen eingefaßt und mit zwanzig Standflächen in Form gleichseitiger Dreiecke ausgebildet“ ist (55a).¹⁸

Bei den Platonischen Körpern, deren Flächen aus gleichseitigen Dreiecken bestehen, also Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder, hat jede Dreiecksfläche sechs solcher rechtwinklig-ungleichschenkligen Grundbausteine oder „schönsten Dreiecke“.¹⁹

Nur beim Hexaeder werden die sechs quadratischen Flächen mit jeweils vier rechtwinklig- gleichschenkligen Dreiecken gebildet.

Die vier Polyeder, die in Platons Elementenlehre mathematisch behandelt werden, enthalten folgende „Grundbausteine“, die als „Urbausteine“ oder „Urdreiecke“ zu bezeichnen sind.

Feuer	Tetraeder	24 Grundbausteine (schönstes Dreieck)
Wasser	Ikosaeder	120 Grundbausteine (schönstes Dreieck)
Erde	Hexaeder	24 Grundbausteine (gleichschenkliges Dreieck)
Luft	Oktaeder	48 Grundbausteine (schönstes Dreieck)

Bemerkt werden sollte hierbei, daß in der Vielheit das Maß als ordnendes Prinzip herrscht. Es ist der Grund der Einheit in der Vielheit. Aber das Maß ist nichts anderes als das durch Zahlen anzugebende Verhältnis.²⁰

¹⁸ Paul Friedländer, wie Anm. 8, S. 269. Hier findet man die Zahlen zum Ikosaeder: „Wasser, das aus 20 gleichseitigen = 40 rechtwinklig-ungleichschenkligen Dreiecken besteht“. Friedländer rechnet also das Ikosaeder mit 40 Urdreiecken. Im nachfolgenden Satz jedoch findet sich: „Wasser, das aus 160 rechtwinklig- ungleichschenkligen Dreiecken besteht“, und das heißt, hier werden acht „Urdreiecke“ für eine Dreiecksfläche des Ikosaeders gerechnet. Diesen Zahlenspekulationen stehen die Texte im 'Timaios' (56/57) entgegen. Sie lassen sehen, daß die von Platon postulierten Zahlenverhältnisse von Feuer – Wasser – Luft bei der theoretischen Umwandlung der Elemente strikt eingehalten werden.

¹⁹ Michael Toepell, wie Anm. 7, S. 51, rechnet irrtümlich für das gleichseitige Dreieck (hier beim Oktaeder): „aus acht der genannten schönsten Grunddreiecke zusammengesetzt“. Es ist eine Abbildung dabei, die aufzeigt, daß das gleichseitige Dreieck in 8 rechtwinklig-ungleichseitige Dreiecke eingeteilt ist. – Zum Problem der Körperlichkeit bei den Platonischen Körpern in der Elementenlehre ist im vorliegenden Beitrag eine Stellungnahme nicht möglich. Vgl. hierzu: Dietrich Joachim Schulz, Das Problem der Materie in Platons 'Timaios' (Abhandlungen zur Philosophie, Psychologie und Pädagogik, Bd. 31), Bonn 1966, S. 27 ff.

²⁰ Heinz Ziegler, Die Zahlenverhältnisse in den Körpern der Elementenlehre des Platon im 'Timaios', in: Ders., Studien zum Umgang mit Zahl, Maß und Gewicht in Nordeuropa seit dem Hohen Mittelalter, (Sachüberlieferung und Geschichte: Siegener Abhandlungen zur Entwicklung der materiellen Kultur, Bd.23), Hg. Harald Witthöft, St. Katharinen 1997, S. 336–342.

Das „schönste“ Dreieck, die Form, die eine Hälfte des gleichseitigen Dreiecks darstellt, bezeichnet Platon als einzigartig, und so wird sich der interessierte Leser die Frage stellen, was Platon dazu bewog, das gleichseitige Dreieck für die Flächen der drei Polyeder mit sechs „Urdreiecken“ zu konstruieren und dann dieses „Urbauteil“ als „schönstes Dreieck“ zu bezeichnen. Das gleichseitige Dreieck hätte Platon doch mit zwei oder auch mit acht „Urdreiecken“ bilden können. Was ist überhaupt so einzigartig an diesem „Urdreieck“? Otto Apelt geht auf diese Frage nicht näher ein.²¹ In einer Anmerkung schreibt er: „Hier geben 6 ungleichseitige Elementardreiecke das gleichseitige Dreieck“. Danach stellt sich für ihn die Frage, warum Platon, um die Dreiecksflächen für das Tetraeder (die Pyramide) zu gewinnen, sich nicht mit der Zusammensetzung zweier ungleichseitiger Elementardreiecke begnüge – die mit der längeren Kathete aneinander geschoben doch auch schon ein gleichseitiges Dreieck ergeben –, sondern eine viel weitläufigere Konstruktion vornimmt. Die Einzigartigkeit dieses Dreiecks wird von Apelt nicht angesprochen; auch darauf geht er nicht ein, warum Platon gerade dieses Dreieck als das „schönste“ herausstellt. Bei Luc Brisson heißt es: „Bis heute ist ungeklärt, warum Timaios sechs rechtwinklige, ungleichseitige Dreiecke braucht, um ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren, wo doch zwei ausreichen würden.“²² Lothar Schäfer meint: Die „Rede

²¹ Otto Apelt, *Platons Dialoge, Timaios und Kritias* (Philosophische Bibliothek, 2. Auflage, Bd. 179), Leipzig 1922, S. 174.

²² Luc Brisson, *Den Kosmos betrachten, um richtig zu leben: Timaios*, in: *Platon. Seine Dialoge in der Sicht neuer Forschungen*, Hg. Theo Kobusch und Burkhard Mojsisch, Darmstadt 1996, S. 229–248, hier S. 237. – Zu den von Platon ausgewählten Dreiecken gibt es unterschiedliche Ansichten. Bei Gernot Böhme lesen wir: „Einen Grund gibt Platon dafür nicht an. Er könnte aber darin bestehen, daß auf diese Weise die Flächen der regulären Körper so zusammengesetzt werden, daß alle Elementardreiecke in einem Punkt, ihrem gemeinsamen Schwerpunkt, zusammenhängen, um den herum sie miteinander im Gleichgewicht stehen“. Gernot Böhme, *Symmetrie: Ein Anfang mit Platon*, in: Bernd Krimmel, Red., *Symmetrie in Kunst, Natur und Wissenschaft*, Ausstellungskatalog Bd. 1, Mathildenhöhe Darmstadt, 1. Juni bis 24 August 1986, S. 9–16. Eine andere Ansicht findet sich bei Karl Popper in seiner Abhandlung „Platon und die Geometrie“: Platon brauche im Timaios für die Konstruktion der Primärkörper ein elementares Quadrat und ein elementares gleichseitiges Dreieck. Diese beiden sind ihrerseits aus zwei Arten von subelementaren Dreiecken ausgebildet – dem Halbquadrat, das die $\sqrt{2}$ enthält, und dem halben gleichseitigen Dreieck, das die $\sqrt{3}$ enthält. Über die Frage, warum er diese zwei subelementaren Dreiecke statt des Quadrats und des gleichschenkligen Dreiecks benutzte, haben sich viele die Köpfe zerbrochen, wie auch über die Frage, warum er seine Elementarquadrate aus vier subelementaren Halbquadraten und nicht aus zweien konstruierte und warum er die elementaren gleichseitigen Dreiecke aus sechs subelementaren halben gleichschenkligen Dreiecken anstatt aus zweien konstruierte. – Was die erste dieser zwei Fragen betrifft, so scheint man ganz allgemein übersehen zu haben, daß Platon mit seinem brennenden Interesse für das Problem der Irrationalität nicht die zwei irrationalen Zahlen $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ (die er ausdrücklich im Timaios 54b erwähnt) eingeführt hätte, wäre er nicht darauf bedacht gewesen, gerade diese beiden Irrationalitäten als nicht weiter auflösbare Elemente in seine Weltanschauung einzubauen. Karl R. Popper, *Die Welt des Parmenides. Der Ursprung des europäischen Denkens*, München/Zürich 1998, S. 330 f.

von Schönheit ist bezogen auf die Vorschriften ihrer Zusammenfügung zu den Grenzflächen der Polyeder. Rein für sich genommen, wird Platon das ganze gleichseitige Dreieck allemal 'schöner' nennen als seine Hälfte".²³

Platon baut seine „Elementarkörperchen“ aus zwei „Urtypen“ von Dreiecken auf, dem gleichschenkelig-rechtwinkligen und einem anderen rechtwinkligen „Dreieckstyp“, den er, aus welchem Grund auch immer, als 'das schönste Dreieck' auswählt, um, wie es heißt, 'einen folgerechten Anfang zu haben'. Und dieses schönste sei das, aus welchem dann das gleichseitige Dreieck entstand.²⁴

Wie aus dem Text (54a) zu ersehen ist, wird das ungleichschenklige „Urdreieck“ explizit als „schönstes“ ausgewiesen und dabei die Einzigartigkeit des rechtwinklig-ungleichschenkligen Dreiecks postuliert. Hierbei ist auf Platons Äußerungen über die Geometrie hinzuweisen, die sich wie folgt zusammenfassen lassen: Es sind zwei Formen von Geometrie zu unterscheiden: a) die Geometrie des täglichen Lebens und b) die philosophische Geometrie. Erstere befaßt sich mit den räumlichen Objekten der sinnlichen Welt. Sie sind dem Werden und Vergehen unterworfen und mit gegensätzlichen Bestimmungen behaftet. Diese Geometrie erreicht deshalb nur angenäherte Wahrheit. Die Objekte der philosophischen Geometrie hingegen sind der sinnlichen Welt entzogen und besitzen die Exaktheit geometrischer Definitionen. Deshalb besitzt diese Wissenschaft genaue und absolute Wahrheit.²⁵

Zum Begriff Schönheit gibt es die unterschiedlichsten Meinungen. So ist z.B. Heisenberg der Ansicht:

„Die mathematische Struktur, nämlich das rationale Zahlenverhältnis als Quelle der Harmonie – das war sicher eine der folgenschwersten Entdeckungen, die in der Geschichte der Menschheit überhaupt gemacht worden sind. Das harmonische Zusammentönen zweier Saiten ergibt einen schönen Klang. Das

²³ Lothar Schäfer, wie Anm.9, S. 216, beachtet nicht die Einzigartigkeit des „schönsten“ Dreiecks. Auch andere Autoren gehen nicht auf das einzigartige Dreieck ein. Bei Gernot Böhme, wie Anm. 10, finden wir auf S. 110 f.: „Die platonischen Körper werden aus gleichseitigen Dreiecken bzw. im Fall des Würfels aus Quadraten gebildet (vom Dodekaeder sehen wir im folgenden ab). Platon führt diese Figuren auf die „schönsten Dreiecke“ zurück, nämlich das halbe gleichseitige Dreieck und das halbe Quadrat. Die spielerische Weise, mit der Platon auch diese Zurückführung einführt, enthebt uns wohl der Notwendigkeit, die Frage zu beantworten, warum er etwa das halbe gleichseitige Dreieck schöner findet als das gleichseitige.“

²⁴ Walter G. Saltzer, Grundzustand und Erschaffung der Neuelemente in Platons Timaios-Kosmologie, in: Die Erfindung des Universums? Neue Überlegungen zur philosophischen Kosmologie (Insel Taschenbuch 1933), Frankfurt/Main und Leipzig 1997, S. 224–246, hier S. 236.

²⁵ Eckhard Niebel, Untersuchungen über die Bedeutung der geometrischen Konstruktion in der Antike (Kantstudien, Ergänzungsheft 76), Köln 1959, S. 73.

menschliche Ohr empfindet die Dissonanz durch die aus den Schwebungen entstehende Unruhe als störend, aber die Ruhe der Harmonie, die Konsonanz, als schön. Die mathematische Beziehung war damit auch die Quelle des Schönen. Die Schönheit ist, so lautete die eine der antiken Definitionen, die richtige Übereinstimmung der Teile miteinander und mit dem Ganzen“.²⁶

Welche Ansicht über Schönheit die Philosophen zur Zeit Platons hatten, sagt uns Platons Schüler Aristoteles:

„Da nun das Gute und das Schöne voneinander verschieden sind (denn das eine findet sich immer nur in der Handlung, das Schöne aber auch in dem Unbeweglichen), so sind diejenigen im Irrtum, welche behaupten, die mathematischen Wissenschaften handelten nicht von dem Schönen und Guten. Ihre Begriffe und Beweise handeln nämlich sehr wohl davon; denn wenn sie das Schöne und Gute zwar nicht nennen, aber dessen Werke und Verhältnisse nachweisen, so kann man nicht sagen, daß sie nicht davon handelten. Die hauptsächlichsten Formen aber des Schönen sind Ordnung und Ebenmaß und Bestimmtheit, was ja am meisten die mathematischen Wissenschaften zum Gegenstand ihrer Beweise haben. Und da dies, ich meine z.B. die Ordnung und Bestimmtheit, sich als Ursache von vielem zeigt, so handeln offenbar die mathematischen Wissenschaften in gewissem Sinne auch von einer solchen Ursache, welche als das Schöne Ursache ist. Deutlicher werden wir darüber an einer anderen Stelle sprechen“.²⁷

Die überragende, ja sogar zentrale Bedeutung des Schönen bei den Griechen ist die des vollkommenen Seins, dem kein Mangel anhaftet - sie ist vom Glanz des Göttlichen überstrahlt. Die Elemente des griechischen Schönheitsbegriffes sind somit der göttliche Ursprung, das „Faszinosum“: vollkommene Gestalt, vollendete Formen, klare Gliederung, harmonische Verhältnisse der Teile zueinander und zum Ganzen.

Der Neuplatoniker Plotin, der in der Mitte des 3. nachchristlichen Jahrhunderts seine Abhandlung „Über das Schöne“ (Enn. I.6) schrieb, bringt zum Ausdruck: „Den sinnlichen Harmonien ist es eigentümlich dem Maß unterworfen zu sein nicht in jedem beliebigen Zahlenverhältnis, sondern nur in demjenigen welches dienlich ist zur Erzeugung der Idee, zur Bewältigung“.²⁸

²⁶ Werner Heisenberg, Die Bedeutung des Schönen in der exakten Naturwissenschaft. Vortrag, gehalten vor der Bayerischen Akademie der schönen Künste, München 1970, in: Schritte über Grenzen. Gesammelte Reden und Aufsätze, München 1971, S. 288–305, hier 291 f.

²⁷ Aristoteles' Metaphysik, Neubearbeitung Horst Seidl, (Philosophische Bibliothek, 3. Auflage, Bd. 308), Hamburg 1991, Buch XIII, Kap. 3, 1078a/b.

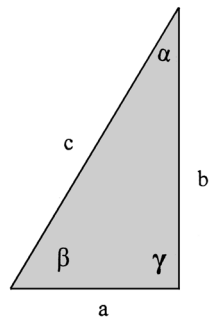
²⁸ Richard Harder, Plotin. Ausgewählte Einzelschriften (Philosophische Bibliothek, Bd. 211a), Sonderdruck Plotins Schriften, Bd.1a, Nachdruck, Hamburg 1968, S. 13.

Platon spricht aber nicht nur von der Schönheit, sondern auch von der Einzigartigkeit für dieses „Urdreiecks“. Tatsächlich ist diese Dreiecksform einmalig, weil es kein weiteres Dreieck mit diesen Winkel- und Längenverhältnissen gibt! Bei einer Diskussion über die Einzigartigkeit darf nicht übersehen werden, dass dieses Dreieck das einzige ist, bei dem die Winkel- wie auch die Längenverhältnisse die Zahlen der Tetraktys beinhalten. Aus alter Überlieferung ist die Zahl Ordnungsbegriff und die Tetraktys galt als pythagoreische Weisheit.²⁹ Den Zahlen kam eine sakrale und göttliche Würde zu, ihnen wurde ein Kult geweiht. Erst später, als das Bewußtsein der ontologischen Zusammenhänge verloren ging, entartete die Zahlenlehre zu einer irrationalen Zahlenmagie. Die Pythagoreer schwuren bei Pythagoras als demjenigen, „der unserem Geschlecht die Tetraktys überbrachte“. Unter dem Begriff Tetraktys versteht man den Kernpunkt pythagoreischer Weisheit. Es ist die Vierergruppe der Zahlen 1, 2, 3, 4, die zusammen 10 ergeben. Den Begriff „Vollkommenheit“ für die Zehnzahl weist Aristoteles den Pythagoreern zu:

„Während dieser Zeit und schon vorher befaßten sich die sogenannten Pythagoreer mit der Mathematik und brachten sie zuerst weiter, und darin eingelebt hielten sie deren Prinzipien für die Prinzipien alles Seienden [...] und indem sie ferner die Bestimmungen und Verhältnisse der Harmonien in Zahlen fanden; – da ihnen also das übrige seiner ganzen Natur nach den Zahlen zu gleichen schien, die Zahlen aber sich als das Erste in der Natur zeigten, so nahmen sie an, die Elemente der Zahlen seien Elemente des Seienden, und der ganze Himmel sei Harmonie und Zahl. [...] Ich meine z.B., da ihnen die Zehnzahl etwas Vollkommenes ist und das ganze Wesen der Zahlen umfaßt, so behaupten sie auch, der bewegten Himmelskörper seien zehn; nun sind aber nur neun wirklich sichtbar; darum erdichten sie als zehnten die Gegenerde. Diesen Gegenstand haben wir anderswo genauer erörtert; daß wir aber jetzt darauf eingehen, hat den Zweck, auch von ihnen zu entnehmen, welche Prinzipien sie setzen und wie diese auf die genannten Ursachen zurückkommen. [...] Andere aus der selben Schule nehmen zehn Prinzipien an, welche sie in entsprechenden Reihen zusammenordnen: Grenze und Unbegrenztes, Ungerades und Gerades, Eines und Vielheit, Rechtes und Linkes, Männliches und Weibliches, Ruhendes und Bewegtes, Gerades und Krümmes, Licht und Finsternis, Gutes und Böses, gleichseitiges und ungleichseitiges Viereck“.³⁰

²⁹ Walter Burkert, *Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon* (Erlanger Beiträge zur Sprach- und Kunstwissenschaft, Bd. X), Nürnberg 1962, S. 63 f. und 170 f. – Vergleiche Leonid Zhmud, *Wissenschaft, Philosophie und Religion im frühen Pythagoreismus*, Berlin 1997, S. 131 ff.: „Der Einfluß des pythagoreischen Denkens auf Platon (vor allem auf den späten Platon) ist unbestritten“.

³⁰ Aristoteles, a.a.O., Buch I, 985b/986a.



Verhältnis

Winkel $\alpha : \beta = 1 : 2$

$\alpha : \gamma = 1 : 3$

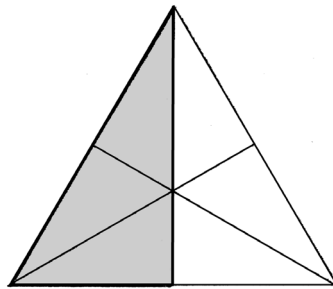
$\beta : \gamma = 2 : 3$

Grundlinie $1 c = 2 a$

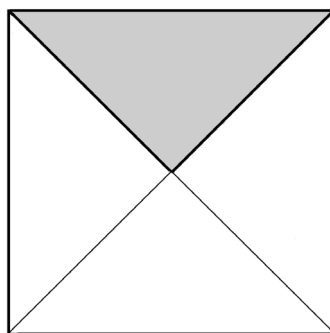
Quadrate $1 c^2 = 4 a^2$

$1 b^2 = 3 a^2$

$4 b^2 = 3 c^2$



Platons schönstes Dreieck ist Urdreieck als Baustein für Feuer, Wasser und Luft.



Vier rechtwinklig-gleichseitige Dreiecke sollen eine Seitenfläche des Würfels bilden, der als Elementkörper die Erde darstellt.

Der Lehre von der Zahl und der Proportion, die sich im Kreise und unter dem Einfluß der Pythagoreer des ausgehenden 5. Jahrhunderts v. Chr. verbreitete, ist es zuzuschreiben, daß die Fragen um das Schöne und die Kunst mehr ins Blickfeld der Philosophie gerückt wurden.³¹ Die hier entstehenden Theorien waren jedoch keine mathematische Kunstlehre ästhetischer Art – ebensowenig wie der Kanon des Polyklet. Da für die Pythagoreer die Mathematik das Gesetz der Welt darstellt, liegt in ihr auch das Gesetz des Schönen und der Werke der Schaffenden. Es ist also verständlich, daß Platon die Einzigartigkeit des von ihm konstruierten „Urdreiecks“ für die Schaffung der drei Elemente Feuer, Wasser und Luft hervorhebt und dieses Dreieck das schönste nennt.

Luc Brisson bemerkt, daß bis heute ungeklärt sei, warum Platon sechs der „schönsten“ Dreiecke benutzt, um ein gleichseitiges Dreieck zu konstruieren. – Hierbei ist darauf hinzuweisen, daß Platon bei der Zahl sechs den Timaios sicherlich im Sinne der Pythagoreer sprechen läßt. Es ist also nicht überraschend, daß er das gleichseitige Dreieck, das drei der regulären Polyeder aufweisen, aus sechs „schönsten“ Dreiecken konstruiert. Für die Pythagoreer war die Zahl sechs nicht nur eine vollkommene Zahl („Vollkommene Zahlen“ sind jene, die der Summe ihrer aliquoten Teile gleich sind), sondern auch schon eine „Schöpfungszahl“.

Für sie war es nicht Zufall oder Zauber, wenn 6 Radien als Sehnen exakt das Sechseck in der Peripherie des Kreises bilden. Die Zahl 6 ist schon im Altertum eine gesetzmäßig maßgebliche Zahl. In biblischer Zeit (schon in der Thora) ist sie mit der Schöpfung verbunden. Philon von Alexandria, auch Philo Judaeus genannt, lebte um 20 n. Chr. in Alexandria. In seinem Buch „Über die Welterschöpfung nach Moses“ kommentiert er den Schöpfungsbericht des Buchs Genesis:

„In sechs Tagen, sagte er (Moses), ist die Welt geschaffen worden, nicht etwa weil der Schöpfer einen Zeitraum dazu nötig hatte – denn es ist selbstverständlich, daß Gott alles auf einmal bewirkt, nicht nur durch seinen Befehl, sondern schon durch sein Denken – , sondern weil für die Entstehung der Dinge eine bestimmte Ordnung nötig war. Zur Ordnung aber gehört die Zahl, und von den Zahlen ist nach Gesetzen der Natur die für die Schöpfung passendste Sechs“.³²

³¹ Ernesto Grassi, *Die Theorie des Schönen in der Antike*, Köln 1962, Neuausgabe, Köln 1980 S. 59 ff. Zu den Pythagoreern vgl. Christoph Riedweg, *Pythagoras. Leben – Lehre – Nachwirkung*. München 2002, S. 152 ff.

³² Van der Waerden, B.L., *Die Pythagoreer. Religiöse Bruderschaft und Schule der Wissenschaft*, Zürich und München 1979, S. 309 f., zitiert nach der Übersetzung von L. Cohn, *Philo von Alexandria, Werke*, Bd. I, Nachdruck, 2. Auflage, Berlin 1962, S. 31. – Der weitere Text im Kommentar zeigt zweifelsfrei, daß Philon aus älteren Quellen schöpfte. Es ist davon auszugehen, daß Platon ebensolche Quellen zur Verfügung standen.

Wenn wir heute von Zahlen sprechen, so denken wir häufig nur an numerische Größen zur Quantifizierung. In früheren Jahrhunderten jedoch verkörperten viele Zahlen Wertvorstellungen. Bestimmte Größenbegriffe waren mit einer bestimmten Zahl verbunden. Aus heutiger Sicht wird man sagen, alles nur Zahlenspielerei. Betrachtet man aber die Gesetzmäßigkeiten der Zahlenverhältnisse in der Geometrie der alten Kulturvölker, so stellt sich doch ein gewisses Verständnis für deren Anschauungen ein. Es ist empfehlenswert, bei einer Diskussion die Gesetzmäßigkeiten zu berücksichtigen, die in der Geometrie alter Kulturvölker eine Rolle spielen. Nicht nur in Griechenland finden sich ausgeprägte Traditionen, sondern auch im alten Ägypten bis in die ptolemäische Zeit.³³

³³ Heinz Ziegler, Die Elle als Längenmaß in den ägyptischen Tempeln der griechisch-römischen Epoche: Edfu – Dendera – Kalabscha, Vortrag gehalten am 13. Oktober 2006 in der Klasse für Geisteswissenschaften der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, in: Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Bd. LVII, 2007, S. 55–108.