

Biegen, Knicken und Schwingen des mehrfeldrigen geraden Balkens

Falk, Sigurd

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 7, 1955, S. 74-92



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Biegen, Knicken und Schwingen des mehrfeldrigen geraden Balkens

Von Sigurd Falk

Mit 10 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn H. Schaefer

Summary: By using of matrices the problem of bending, buckling and oscillating of a straight beam with several sections is systematical formulated, and is solved in case of constant section-coefficients.

Übersicht: Das Problem des Biegens, Knickens und Schwingens von geraden Balken mit mehreren Feldern wird mit Hilfe von Matrizen übersichtlich formuliert und im Falle feldweise konstanter Kenngrößen allgemein gelöst.

1. Einleitung

Das Problem der Biegung, Knickung und Schwingung mehrfeldriger Balken und Rahmen wird von linearen Differentialgleichungen vierter Ordnung beherrscht; es treten somit in jedem Felde vier freie Integrationskonstanten auf, die gewissen Bedingungen angepaßt werden müssen. Für den nur zweifeldrigen Balken findet sich in der technischen Literatur seit langem eine Fülle von durchgerechneten Beispielen, so vor allem bei *L. Collatz* [3], *A. Pffüger* [6], *Hohenemser-Prager* [4]; für Schwingungen von Balken und Rahmen mit beliebig vielen Feldern jedoch sind erst in letzter Zeit allgemein brauchbare Methoden zum Anpassen der Konstanten entwickelt worden, so von *E. Pestel* [5], *H. Fuhrke* [7] und *Unger-Schäfer* [8]. Auch das Knicken mehrfeldriger Balken wurde inzwischen von *K. Marguerre* [9] und *W. Schnell* [10] behandelt.

In der vorliegenden Arbeit wird das sonst so lästige „Aneinanderflicken“ der Lösungen von linearen Differentialgleichungen unabhängig von irgendeiner mechanischen Bedeutung mit Hilfe von Matrizen in voller Allgemeinheit systematisch durchgeführt. Als einfachstes Anwendungsbeispiel dient das Biegen, Knicken und Schwingen eines mehrfeldrigen geraden Balkens mit konstanten mechanischen Kenngrößen, für den sich fertige Matrizen angeben lassen, die ein für allemal als Bausteine für die Berechnung irgendeines starr oder elastisch gestützten Balkens mit beliebiger Felderzahl verwendbar sind, wobei der Rechenaufwand etwa in der gleichen Größenordnung liegt wie der jener zahlreichen, für spezielle Probleme besonders von *R. Grammel* [1] entwickelten Näherungsverfahren, die das Anpassen der Konstanten ganz umgehen.

Die spezielle Matrix $\mathfrak{F}^*(x)$ wollen wir die „Feldmatrix“ nennen; nach (8) gestattet sie, aus den Werten $\eta(x_i)$ und $\rho(x_i)$ am linken Feldrande jeden beliebigen Wert von $\eta(x) - \rho(x)$ im Inneren des Feldes linear auszu-drücken; die in der ersten Zeile von $\mathfrak{F}^*(x)$ zusammengefaßten m Funktionen heißen das „normierte Fundamentalsystem“ der homogenen Diff.-Gl. (1).

Die Feldmatrix $\mathfrak{F}^*(x)$ geht für $x = x_i$ in die Einheitsmatrix \mathfrak{E} , für $x = x_{i+1}$ jedoch in die „Leitmatrix“ \mathfrak{L} über:

$$\mathfrak{F}^*(x_i) = \mathfrak{F}(x_i) \cdot \mathfrak{F}^{-1}(x_i) = \mathfrak{E} ; \quad \mathfrak{F}^*(x_{i+1}) = \mathfrak{L} \quad (9)$$

Damit ist

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{am linken Feldrand: } \eta(x_i) - \rho(x_i) = \mathfrak{E} \cdot [\eta(x_i) - \rho(x_i)] \quad (10a) \\ \text{im Feldinnern: } \eta(x) - \rho(x) = \mathfrak{F}^*(x) \cdot [\eta(x_i) - \rho(x_i)] \quad (10b) \\ \text{am rechten Feldrand: } \eta(x_{i+1}) - \rho(x_{i+1}) = \mathfrak{L} \cdot [\eta(x_i) - \rho(x_i)] \quad (10c) \end{array} \right.$$

Die konstante Matrix \mathfrak{L} leitet nach (10c) die Werte der Lösungsfunktionen und ihrer ersten $m - 1$ Ableitungen vom linken zum rechten Feldrande hinüber; sie spielt daher für das Folgende eine bedeutende Rolle.

2.2 Die Übergangsmatrix

Wir betrachten jetzt den Übergang zwischen zwei Feldern der Nummern i und $i + 1$, in denen je eine Diff.-Gl. der Form (1) mit dem zugehörigen vollständigen Lösungssystem gegeben sei. Die Werte $\eta_i(x_{i+1})$ werden sich im allgemeinen nach der symbolisch zu verstehenden Abb. 1 sprunghaft um den Vektor \mathfrak{s}_{i+1} ändern:

$$\eta_{i+1}(x_{i+1}) = \eta_i(x_{i+1}) + \mathfrak{s}_{i+1} \quad (11)$$

Ist nun der Sprungevektor \mathfrak{s}_{i+1} eine lineare Funktion der Werte $\eta_i(x_{i+1})$ links von der Feldgrenze x_{i+1} , also von der Form

$$\mathfrak{s}_{i+1} = \mathfrak{G}_{i+1} \cdot \eta_i(x_{i+1}) + \mathfrak{k}_{i+1} \quad (12)$$

mit gegebener konstanter Matrix \mathfrak{G}_{i+1} und gegebenem konstanten Vektor \mathfrak{k}_{i+1} , so wird aus (11) und (12) und schließlich nach (10c), wenn wir noch

$$\mathfrak{E} + \mathfrak{G}_{i+1} = \mathfrak{U}_{i+1} \quad (13)$$

setzen:

$$\eta_{i+1}(x_{i+1}) = \mathfrak{U}_{i+1} \cdot \{\eta_i(x_{i+1}) + \mathfrak{L}_i \cdot [\eta_i(x_i) - \rho_i(x_i)]\} + \mathfrak{k}_{i+1} \quad (14)$$

Sind insbesondere Diff.-Glg. und Übergangsbedingung homogen, ist also in (1) $r(x) \equiv 0$ und in (12) $\mathfrak{k}_{i+1} = 0$, so wird aus (14) einfach

$$\eta_{i+1}(x_{i+1}) = \mathfrak{U}_{i+1} \cdot \mathfrak{L}_i \cdot \eta_i(x_i) \quad (15)$$

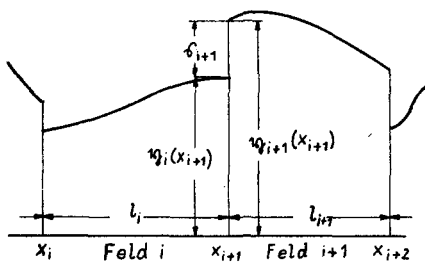


Abb. 1

In diesem Falle wird bisweilen auch das Produkt $\mathfrak{L}_{i+1} \cdot \mathfrak{L}_i$ als Übergangsmatrix bezeichnet, so z. B. bei *E. Pestel* [5].

Für n Felder folgt nun aus (15):

$$\mathfrak{v}_n(x_{n+1}) = \mathfrak{L}_n \cdot \mathfrak{L}_n \cdot \dots \cdot \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{v}_1(x_1) \quad (16)$$

und eine ähnliche Formel aus (14), falls einige oder alle Diff.-Gln. und Übergangsbedingungen inhomogen sind. Damit ist gezeigt, wie sich die Werte $y, y', \dots, y^{(m-1)}$ am rechten Rande des n -ten Feldes linear ausdrücken durch die entsprechenden Werte am linken Rande des ersten Feldes.

2.3 Randbedingungen

Es seien zunächst $m = l + r$ linear unabhängige *äußere* Randbedingungen vorgegeben, nämlich l am linken Ende des ersten und r am rechten Ende des n -ten Feldes, und zwar sollen in den l (r) Bedingungen links (rechts) nur Werte $y, y', \dots, y^{(m-1)}$ genommen an der Stelle x_1 (x_{n+1}) vorkommen. Durch die l Bedingungen links sind dann genau l der Integrationskonstanten $(A_1, \dots, A_m) = \alpha$ bzw. $(y_1(x_1), \dots, y_1^{(m-1)}(x_1)) = \mathfrak{v}_1(x_1)$ oder doch l Linearkombinationen von ihnen festgelegt; die übrigen r Konstanten gehen mit dem Vektor $\mathfrak{v}_1(x_1)$ nach (14) durch die ganze Rechnung hindurch und werden zum Schluß durch die r Randbedingungen am rechten Ende des n -ten Feldes bestimmt. Bei vollhomogenen Problemen, d. h. wenn Diff.-Gln., Übergangs- und Randbedingungen homogen sind, gibt es im allgemeinen nur die Triviallösungen $y_i(x) \equiv 0$; hat die Aufgabe jedoch für gewisse, in der Praxis meist gesuchte, sogenannte „Eigenwerte“ (Knicklasten, Eigenfrequenzen usw.) eines in der Diff.-Gl. sowie in den Übergangs- und Randbedingungen auftretenden freien Parameters nichttriviale Lösungen, so bleibt irgendeine der von Null verschiedenen Integrationskonstanten frei wählbar, man kann sie etwa gleich eins setzen.

Sind nun auch an einer *inneren* Feldgrenze x_{i+1} außer den dort vorhandenen m Übergangsbedingungen noch $s \leq r$ der Werte $y_i(x_{i+1})$ oder $y_{i+1}(x_{i+1})$ selbst oder Linearkombinationen von ihnen vorgeschrieben, so werden dadurch weitere s der bis dahin r noch freien Integrationskonstanten festgelegt, doch treten dafür aus den nun nicht mehr willkürlich vorgebbaren Übergangsbedingungen auch gerade s neue Konstanten hinzu, so daß die r Bedingungen am rechten Ende des n -ten Feldes stets erfüllbar sind. Ist an irgendeiner inneren Feldgrenze $s = r$, so zerfällt die Aufgabe in zwei getrennte Teile, d. h. die Lösungen links von dieser Stelle sind unabhängig von denen rechts.

3. Feld- und Leitmatrizen für den geraden Balken mit feldweise konstanten Kenngrößen bei Biegung, Knickung und Schwingung

Die Diff.-Gln. für Biegung, Knickung und Schwingung sind von der Ordnung $m = 4$, somit haben wir es im folgenden stets mit 4reihigen Matrizen zu tun. Sind überdies die in den Diff.-Gln. auftretenden Koeffizienten, wie Biegesteifigkeit $EJ_i = \alpha_i$, Längendichte μ_i , Längskraft S_i usw. im Felde i der Länge l_i sämtlich konstant, so lassen sich die Lösungsfunktionen und damit die zugehörigen Feld- und Leitmatrizen ein für allemal hinschreiben.

Als Komponenten des Vektors $\mathfrak{v}_i(x)$ führen wir jetzt natürlich die folgenden vier Größen ein:

$$\mathfrak{v}_i(x) = \begin{bmatrix} y_i(x) & = \text{Durchbiegung} \\ y_i'(x) & = \text{Neigung} \\ -\alpha_i y_i''(x) = M_i(x) & = \text{Biegemoment} \\ -\alpha_i y_i'''(x) = Q_i(x) & = \text{Querkraft} \end{bmatrix} \text{ im Felde } i \quad (17)$$

3.1 Biegung des senkrecht belasteten geraden Balkens

Die zugehörige Diff.-Glg. lautet:

$$y_i'''' = \frac{q_i(x)}{\alpha_i}; \quad q_i(x) \text{ [kg cm}^{-1}\text{]} \quad (18)$$

Das nächstliegende Fundamentalsystem der homogenen Gleichung (18) mit seinen $m-1 = 3$ Ableitungen ist wohl

$$\begin{aligned} y_i(x) &= 1 \cdot A_1 + (x-x_i) \cdot A_2 + (x-x_i)^2 \cdot A_3 + (x-x_i)^3 \cdot A_4 \\ y_i'(x) &= 0 \cdot A_1 + 1 \cdot A_2 + 2(x-x_i) \cdot A_3 + 3(x-x_i)^2 \cdot A_4 \\ -\alpha_i y_i''(x) &= 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 - 2\alpha_i \cdot A_3 - 6\alpha_i(x-x_i) \cdot A_4 \\ -\alpha_i y_i'''(x) &= 0 \cdot A_1 + 0 \cdot A_2 + 0 \cdot A_3 - 6\alpha_i \cdot A_4. \end{aligned}$$

In die Matrix $\mathfrak{F}_i(x)$ dieses Funktionensystems setzen wir nun den Wert $x = x_i$ der linken Feldgrenze ein und bekommen

$$\mathfrak{F}_i(x_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6\alpha_i \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{F}_i^{-1}(x_i) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/6\alpha_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

Nach (7) ist somit die Feldmatrix $\mathfrak{F}_i^*(x) = \mathfrak{F}_i(x) \cdot \mathfrak{F}_i^{-1}(x_i)$:

$$\mathfrak{F}_i^*(x) = \begin{bmatrix} 1 & x-x_i & -(x-x_i)^2/2\alpha_i & -(x-x_i)^3/6\alpha_i \\ 0 & 1 & -(x-x_i)/\alpha_i & -(x-x_i)^2/2\alpha_i \\ 0 & 0 & 1 & x-x_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Setzt man zur Probe $x = x_i$ ein, so wird tatsächlich $\mathfrak{F}_i^*(x_i) = \mathfrak{E}$ nach (9), die Leitmatrix \mathfrak{L}_i aber wird für $x = x_{i+1}$ wegen $x_{i+1} - x_i = l_i$:

$$\mathfrak{L}_i = \mathfrak{F}_i^*(x_{i+1}) = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & l_i & -l_i^2/2\alpha_i & -l_i^3/6\alpha_i \\ 0 & 1 & -l_i/\alpha_i & -l_i^2/2\alpha_i \\ \hline 0 & 0 & 1 & l_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] = \begin{bmatrix} \mathfrak{P}_i & \mathfrak{Q}_i \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{P}_i \end{bmatrix} \quad (21)$$

mit den zweireihigen Untermatrizen

$$\mathfrak{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & l_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{Q}_i = \frac{-l_i}{6\alpha_i} \begin{bmatrix} 3l_i & l_i^2 \\ 6 & 3l_i \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (22)$$

3.2 Knickung (Knickbiegung) des geraden Balkens

$$\text{Diff.-Glg.: } y_i'' + \nu_i^2 \cdot y_i' = r_i(x) \quad ; \quad \nu_i^2 = S_i/\alpha_i \text{ [cm}^{-2}\text{]} \quad (23)$$

Setzt man als Fundamentalsystem an

$$y_i(x) = 1 \cdot A_1 + (x - x_i) \cdot A_2 + \cos \nu_i (x - x_i) \cdot A_3 + \sin \nu_i (x - x_i) \cdot A_4$$

und bildet wiederum die Funktionen y_i' , $-\alpha_i y_i''$ und $-\alpha_i y_i'''$, so werden Feld- und Leitmatrix nach ähnlicher leichter Rechnung wie in 3.1:

$$\mathfrak{F}_i^*(x) \text{ bzw. } \mathfrak{L}_i = \begin{bmatrix} \mathfrak{P}_i & (\mathfrak{R}_i - \mathfrak{P}_i)/S_i \\ \mathfrak{D} & \mathfrak{R}_i \end{bmatrix} \quad (24)$$

$$\text{mit } \mathfrak{P}_i = \begin{bmatrix} 1 & l_i \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ und } \mathfrak{R}_i = \begin{bmatrix} c_{ii} & s_{ii}/\nu_i \\ -\nu_i s_{ii} & c_{ii} \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

wo zur Abkürzung gesetzt wurde:

$$\left. \begin{aligned} c_{ii} &= \cos \nu_i (x - x_i) \text{ bzw. } \cos \nu_i l_i \\ s_{ii} &= \sin \nu_i (x - x_i) \text{ bzw. } \sin \nu_i l_i \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

3.3 Freie (erzwungene) Schwingung des geraden Balkens

$$\text{Diff.-Gl.: } y_i'''' - k_i^4 \cdot y_i = r_i(x) \quad ; \quad k_i^4 = \frac{\mu_i \cdot \omega^2}{\alpha_i} \text{ [cm}^{-4}\text{]} \quad (27)$$

Mit dem Fundamentalsystem $\mathfrak{Cof} k_i(x - x_i)$, $\mathfrak{Sin} k_i(x - x_i)$, $\cos k_i(x - x_i)$ und $\sin k_i(x - x_i)$ bekommt man auf ähnliche Weise wie unter 3.1 und 3.2:

$$\mathfrak{F}_i^*(x) \text{ bzw. } \mathfrak{L}_i = 1/2 \cdot \begin{bmatrix} \mathfrak{A}_i & \mathfrak{B}_i \\ \alpha_i^2 k_i^4 \mathfrak{B}_i & \mathfrak{A}_i \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathfrak{A}_i = \begin{bmatrix} C_{ii} + c_{ii} & (S_{ii} + s_{ii})/k_i \\ k_i (S_{ii} - s_{ii}) & C_{ii} + c_{ii} \end{bmatrix}; \quad |\mathfrak{A}_i| = 2 \cdot (1 - C_{ii} c_{ii}); \quad (29)$$

$$\mathfrak{B}_i = \begin{bmatrix} (c_{ii} - C_{ii})/\alpha_i k_i^2 & (s_{ii} - S_{ii})/\alpha_i k_i^3 \\ -(s_{ii} + S_{ii})/\alpha_i k_i & (c_{ii} - C_{ii})/\alpha_i k_i^2 \end{bmatrix}; \quad |\mathfrak{B}_i| = 2 \cdot (1 + C_{ii} c_{ii})/\alpha_i^2 k_i^4 \quad (30)$$

mit den Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} c_{ii} &= \cos k_i (x - x_i) \text{ bzw. } \cos k_i l_i \\ s_{ii} &= \sin k_i (x - x_i) \text{ bzw. } \sin k_i l_i \\ C_{ii} &= \mathfrak{Cof} k_i (x - x_i) \text{ bzw. } \mathfrak{Cof} k_i l_i \\ S_{ii} &= \mathfrak{Sin} k_i (x - x_i) \text{ bzw. } \mathfrak{Sin} k_i l_i \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Auf ähnliche Weise lassen sich auch für zahlreiche andere mechanische Probleme, die auf lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten führen, die zugehörigen Feld- und Leitmatrizen leicht aufstellen.

4. Übergangsmatrizen am geraden Balken

Für die praktisch wichtigsten Fälle stellen wir jetzt die Übergangsmatrizen zusammen. Dabei ist besonders darauf zu achten, daß die Querkraft $Q = -\alpha y'''$ bei nur senkrecht belasteten geraden Balken (Biegung und Schwingung) in y -Richtung, beim Hinzutreten von Längskräften jedoch (Knickung usw.) in Normalenrichtung, also senkrecht zur verbogenen Balkenachse, zu messen ist.

4.1 Übergangsmatrizen für Biegung und Schwingung

Die Abb. 2 zeigt einen Feldübergang mit Zug- und Drehfeder sowie einer schwingenden Einzelmasse, deren Trägheitskraft $T_{i+1} = y_i m_{i+1} \cdot \omega^2$ ist. Durchbiegung und Neigung gehen stetig ineinander über, also ist an der Stelle x_{i+1} :

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i \\ y'_{i+1} &= y'_i \\ M_{i+1} &= M_i - \tilde{M}_{i+1} = M_i - C_{i+1} \cdot y'_i \\ Q_{i+1} &= Q_i + F_{i+1} - T_{i+1} = Q_i + (c_{i+1} - m_{i+1} \omega^2) \cdot y_i \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

Somit ist die Übergangsmatrix $\mathfrak{U}_{i+1} = \mathfrak{E} + \mathfrak{G}_{i+1}$ von der Form

$$\mathfrak{U}_{i+1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{i+1} & 1 & 0 \\ \beta_{i+1} & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]; \quad \text{mit } \beta_{i+1} = c_{i+1} - m_{i+1} \cdot \omega^2 \quad (33)$$

(bei Biegung ist $\omega^2 = 0$ zu setzen).

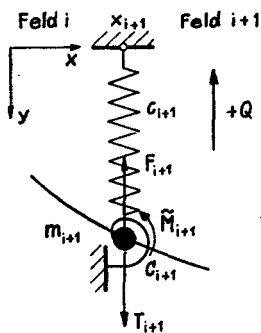


Abb. 2

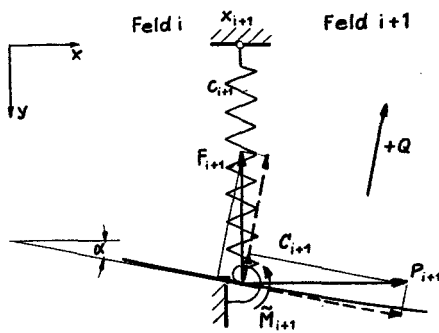


Abb. 3

4.2 Übergangsmatrizen für Knickung

Bei dem Übergang nach Abb. 3 mit Zug- und Drehfeder sowie waagerechter (nicht tangentialer!) Einzelkraft P_{i+1} werden die Kräfte F_{i+1} und P_{i+1} zunächst zerlegt in Tangenten- und Normalenrichtung, bekommen also die Faktoren $\cos \alpha \approx 1$ und $\sin \alpha \approx \tan \alpha = y'_i$. Die Tangentialkomponente

der Federkraft ist $c_{i+1} y_i y_i'$ und wird als von höherer Ordnung klein vernachlässigt. Damit verbleiben die vier Bedingungen

$$\left. \begin{aligned} y_{i+1} &= y_i \\ y'_{i+1} &= y'_i \\ M_{i+1} &= M_i - \tilde{M}_{i+1} = M_i - C_{i+1} y'_i \\ Q_{i+1} &= Q_i + F_{i+1} + P_{i+1} y'_i = Q_i + c_{i+1} y_i + P_{i+1} y'_i \end{aligned} \right\} (34)$$

mit der Übergangsmatrix $\mathfrak{E} + \mathfrak{G}_{i+1} = \mathfrak{U}_{i+1}$:

$$\mathfrak{U}_{i+1} = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{i+1} & 1 & 0 \\ c_{i+1} & P_{i+1} & 0 & 1 \end{array} \right] \quad (35)$$

In zweireihigen Untermatrizen lassen sich (33) und (35) einfach schreiben als

$$\mathfrak{U}_{i+1} = \left[\begin{array}{cc} \mathfrak{E} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{B}_{i+1} & \mathfrak{E} \end{array} \right] \quad (36)$$

Sämtliche mechanischen Kenngrößen finden sich hier in der zweireihigen Matrix \mathfrak{B}_{i+1} links unten in (36) wieder; doch gibt es auch andere Übergänge, bei denen das nicht der Fall ist.

5. Randbedingungen beim geraden Balken

An den äußeren Feldrändern sind stets $l = r = 2$ Bedingungen vorgeschrieben. Oft sind von vornherein zwei der vier Werte y , y' , M und Q gleich Null zu setzen, z. B. $y = 0$, $y' = 0$ (feste Einspannung), $y = 0$, $M = 0$ (festes Gelenk), $y' = 0$, $Q = 0$ (senkrecht verschiebliche Einspannung), $M = 0$, $Q = 0$ (freies Ende). Sind aber an den Enden etwa Federn oder bei der Knickung waagerechte Einzelkräfte vorhanden, so geht man mit Hilfe der zugehörigen Übergangsmatrix in das Feld der Nummer 0 bzw. $n + 1$ und verlangt dort einfach $M = 0$, $Q = 0$. Auf jeden Fall also sind zwei Integrationskonstanten von Anfang an gleich Null, so daß man nur mit den beiden übrigen zu rechnen hat. Bei vollhomogenen Problemen ist daher auch die Eigenwertdeterminante nur von zweiter Ordnung unabhängig von der Felderzahl n .

Sind nun außerdem noch innere Randbedingungen vorhanden, so unterscheiden wir:

a) An irgendeiner inneren Feldgrenze sind zwei Bedingungen vorgeschrieben, z. B. $y = 0$, $y' = 0$ (feste Einspannung) oder $y = 0$, $M = 0$ (festes Gerbergelenk). Dann lassen sich die beiden bis dahin freien Konstanten bereits an dieser Stelle festlegen; die Rechnung zerfällt; d. h. die Biegelinien rechts und links von dieser Stelle sind unabhängig voneinander.

b) An einer inneren Feldgrenze ist nur eine Bedingung zu erfüllen, z. B. $y = 0$ (festes Gelenk) oder $y' = 0$ (verschiebliche Einspannung). Dann läßt

sich eine der beiden bisher freien Konstanten durch die andere linear ausdrücken; doch tritt dafür auch genau eine neue Unbekannte auf, so daß die Rechnung wieder mit zwei Konstanten weiterläuft. Oft ist es jedoch bequemer, die neu hinzugetretene Unbekannte stehen zu lassen und erst am Schluß die beiden äußeren Bedingungen zusammen mit den inneren zu erfüllen; da nämlich an jeder Feldgrenze höchstens eine Unbekannte auftauchen kann — anderenfalls würde ja die Lösung zwischendurch zerfallen — hat das schließlich verbleibende Gleichungssystem eine Matrix der sogenannten „Hessenbergform“ (37), deren Determinante sich leicht rekursiv berechnen läßt.

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & 0 & \dots & 0 \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ h_{p1} & h_{p2} & h_{p3} & h_{p4} & \dots & h_{pp} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Weitere Einzelheiten über diese Art der Auflösung findet man in der Arbeit von *W. Bollermann* [2].

6. Praktische Durchführung und Beispiele

Der Balken mit nur einem einzigen Feld bietet keine nennenswerten Schwierigkeiten; bei Eigenwertproblemen mit einfachen Randbedingungen läßt sich die Knick- bzw. Frequenzdeterminante nach Streichen zweier Zeilen und Spalten der Leitmatrix oft direkt ablesen. Bei der Schwingung eines links eingespannten und rechts freien Balkens ohne Federn und Einzelmasse zum Beispiel verschwinden links y und y' , also streicht man in der Leitmatrix (28) die beiden ersten Spalten; rechts dagegen müssen Moment und Querkraft gleich Null sein, somit sind auch die beiden letzten Zeilen zu streichen. Übrig bleibt in (28) die Matrix \mathfrak{B} oben rechts, deren gleich Null gesetzte Determinante nach (30) die gesuchte Frequenzgleichung $1 + \text{Cof } kl \cdot \cos kl = 0$ ist. Bei Knickproblemen ist besonders darauf zu achten, daß an einem freien Ende mit waagerechter Einzelkraft nicht etwa die (hier in Normalenrichtung des gebogenen Balkens fallende) Querkraft gleich Null zu setzen ist; man muß vielmehr noch einen Übergang zum nächsten (eigentlich gar nicht vorhandenen) Feld vornehmen und kann dort erst $Q = 0$, $M = 0$ setzen.

Sind nun mehrere Felder vorhanden, so geht man nach (14) bis (16) vor: zwei Integrationskonstanten sind wie gezeigt von vornherein gleich Null; die beiden übrigen werden mit ihren zugehörigen Einheitsvektoren der Reihe nach in die Matrizen $\mathfrak{U}_1, \mathfrak{U}_2, \mathfrak{U}_3, \dots, \mathfrak{U}_n, \mathfrak{U}_{n+1}$ hineinmultipliziert, bis zum Schluß der Vektor $\mathfrak{v}_n(x_{n+1})$ bzw. $\mathfrak{v}_{n+1}(x_{n+1})$ erscheint, von dem zwei Komponenten gleich Null gesetzt werden. Die Abb. 4 zeigt einen beiderseits freien n -feldrigen Knickstab mit Zug- und Drehfedern sowie waagerechten Einzelkräften, darunter das zugehörige Rechenschema. Die beiden eingerahmten Komponenten ganz unten rechts, nämlich Moment und Querkraft im $n+1$ ten Felde müssen verschwinden (38), damit ist $D(\nu) = 0$ die gesuchte Knickbedingung (39).

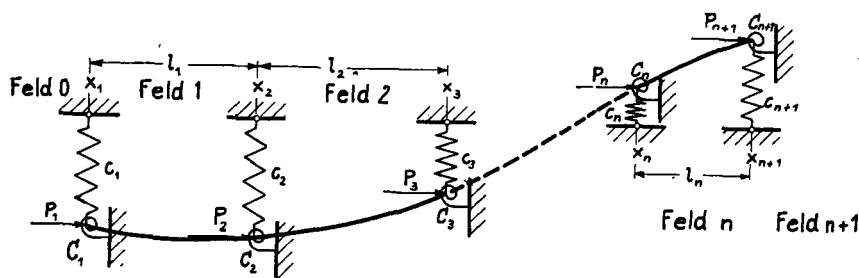


Abb. 4

$$\begin{bmatrix} y_0(x_1) & y_0'(x_1) \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathfrak{v}_0(x_1)$$

$$[\mathfrak{U}_1] \begin{bmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{bmatrix} = \mathfrak{v}_1(x_1)$$

$$[\mathfrak{L}_1] \begin{bmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{bmatrix} = \mathfrak{v}_1(x_2)$$

$$[\mathfrak{U}_2] \begin{bmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{bmatrix} = \mathfrak{v}_2(x_2)$$

$$\dots$$

$$[\mathfrak{L}_n] \begin{bmatrix} \downarrow \\ \downarrow \end{bmatrix} = \mathfrak{v}_n(x_{n+1})$$

$$\begin{bmatrix} \mathfrak{U}_{n+1} \\ \mathfrak{L}_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix} = \mathfrak{v}_{n+1}(x_{n+1})$$

$$\left. \begin{aligned} a_3 \cdot y_0(x_1) + b_3 \cdot y_0'(x_1) &= \\ &= M_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \\ a_4 \cdot y_0(x_1) + b_4 \cdot y_0'(x_1) &= \\ &= Q_{n+1}(x_{n+1}) = 0 \end{aligned} \right\} (38)$$

$$D(v) = \begin{vmatrix} a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{vmatrix} = 0 \quad (39)$$

Man kann versuchen, die so schematisierte Rechnung ganz allgemein formelmäßig durchzuführen, doch sind die entstehenden Schlußformeln schon bei mehr als zwei Feldern zumeist so umfangreich und schwer übersehbar, daß sie nicht immer praktischen Wert besitzen. Nur in Sonderfällen lassen sich einigermaßen handliche Formeln angeben, so z. B. wenn alle Übergangsmatrizen $\mathfrak{U}_i = \mathfrak{E}$ sind, d. h. wenn die Werte y , y' , M und Q an allen Feldgrenzen stetig ineinander übergehen (wie in Beispiel 2), oder aber, wenn die Feldlängen, Biegesteifigkeiten und Längskräfte (bzw. Längendichten) und damit alle Leitmatrizen \mathfrak{L}_i in sämtlichen Feldern einander gleich sind. Für solche einfachen Fälle findet man z. B. bei A. Pflüger [6] und in [11] einige Knickformeln angegeben; für Balkenschwingungen dagegen scheinen entsprechende Formeln nicht bekannt zu sein.

Im allgemeinen wird man daher eine Reihe von zweckmäßig angenommenen festen Werten ν bzw. k in die Leit- und Übergangsmatrizen einsetzen, die Rechnung jedesmal neu durchführen und den Wert der zweireihigen [oder nach (37) auch mehrreihigen] Determinante über ν bzw. k auftragen und nachsehen, wo diese Null wird. Dieses Verfahren ist für den Sonderfall von

Drehschwingungen masseloser mit trägen Scheiben besetzter elastischer Wellen (reduzierte Kurbelwellen) unter dem Namen von *Holzer-Tolle* in der Technik längst bekannt; es ist neuerdings von *E. Pestel* [5] auf beliebige Schwingungen ganz allgemeiner Stabwerke erweitert worden und hat sich in der Praxis gut bewährt. Der Vorteil dieser Verfahrensweise liegt in der weitgehenden Schematisierbarkeit; die Matrizenmultiplikationen mit ihren einfachen Zeilensummenkontrollen lassen sich von Hilfskräften oder von automatischen Rechenmaschinen leicht durchführen, und wenn einigermaßen brauchbare Näherungswerte für die zu erwartenden Knicklasten bzw. Eigenfrequenzen vorliegen, genügen oft zwei bis drei Rechnungsgänge, um den gesuchten (meist den niedrigsten) Eigenwert hinreichend genau in Schranken einzuschließen.

Beispiel 1. Die Biegelinie des zweifeldrigen Balkens der Abb. 5 ist zu berechnen. Gegeben: $l_1 = l$, $l_2 = 2l$, $EJ_1 = \alpha$, $EJ_2 = 4\alpha$, $q = 4P/l$, $c = 6\alpha/l^3$.

a) Leitmatrizen. Setzt man in (21) die gegebenen Werte ein, so wird

$$\mathfrak{L}_1 = \begin{bmatrix} 1 & l & -l^2/2\alpha & -l^3/6\alpha \\ 0 & 1 & -l/\alpha & -l^2/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{L}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2l & -l^2/2\alpha & -l^3/3\alpha \\ 0 & 1 & -l/2\alpha & -l^2/2\alpha \\ 0 & 0 & 1 & 2l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Übergang an der Stelle x_2 . In der Übergangsmatrix (33) ist hier zu setzen: $C_2 = 0$ und $\beta_2 = c_2 - 0 = c = 6\alpha/l^3$. Das Biegemoment springt um den konstanten Wert $M = Pl$, also tritt nach (12) der Vektor \mathfrak{f}_2 hinzu:

$$\mathfrak{U}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6\alpha/l^3 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathfrak{f}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Pl \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Randbedingungen. Die äußeren Randbedingungen sind wegen der festen Einspannung links und der senkrecht verschieblichen Einspannung rechts:

$$x = x_1: \begin{cases} y_1(x_1) = 0 \\ y_1'(x_1) = 0 \end{cases}; \quad x = x_3: \begin{cases} y_2'(x_3) = 0 \\ Q_2(x_3) = 0 \end{cases}$$

Innere Randbedingungen sind nicht vorhanden.

d) Im zweiten Felde ist die Diff.-Gl. homogen, im ersten dagegen nicht:

$$y_1''''(x) = q/\alpha_1; \quad y_2''''(x) = 0$$

Als Partikularlösung im ersten Felde wählen wir

$$p_1(x) = \begin{bmatrix} p_1(x) \\ p_1'(x) \\ -\alpha_1 \cdot p_1''(x) \\ -\alpha_1 \cdot p_1'''(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q(x-x_1)^4/24\alpha_1 \\ q(x-x_1)^3/6\alpha_1 \\ -q(x-x_1)^2/2 \\ -q(x-x_1) \end{bmatrix}$$

$$v_1(x_1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad v_1(x_2) = \begin{bmatrix} l^4/24 \alpha_1 \\ l^3/6 \alpha_1 \\ -l/2 \\ -l \end{bmatrix}$$

Wegen $v_1(x_1) = 0$ und $v_2(x) = 0$ ist daher nach (10c) einfach:

$$v_1(x_2) = \mathfrak{L}_1 \cdot v_1(x_1) + p_1(x_2) \quad \text{und} \quad v_2(x_3) = \mathfrak{L}_2 \cdot v_2(x_2) \quad (40)$$

e) Damit läßt sich das Rechenschema auf Seite 86 ohne weiteres ausfüllen: links schreibt man untereinander die drei Matrizen \mathfrak{L}_1 , \mathfrak{L}_2 und \mathfrak{L}_3 und rechts oben den Vektor $v_1(x_1)$ mit den zwei noch freien Konstanten $M_1(x_1)$ und $Q_1(x_1)$ hin. Zu dem Produkt $\mathfrak{L}_1 \cdot v_1(x_1)$, das rechts neben \mathfrak{L}_1 steht, muß nach (40) der Vektor $p_1(x_2)$ hinzugefügt werden. Damit sind die Werte y , y' , M und Q vom linken zum rechten Rande des ersten Feldes hinübergeleitet. Nun kommt der Übergang an der Stelle x_2 :

$$v_2(x_2) = \mathfrak{L}_2 \cdot v_1(x_2) + \mathfrak{k}_2$$

Schließlich wird der Vektor $v_2(x_2)$ mit \mathfrak{L}_3 multipliziert, und unten rechts erscheint der Vektor $v_2(x_3)$, dessen zweite und vierte Komponente, nämlich $y_2'(x_3)$ und $Q_2(x_3)$ gleich Null gesetzt, die beiden Gleichungen ergeben:

$$(-l^2/\alpha) \cdot Q_1(x_1) + 19ql^3/24 \alpha - Pl^2/2 \alpha = 0 \quad ; \quad (-3/l) \cdot M_1(x_1) - 3ql/4 = 0$$

und daraus wegen $ql = 4P$:

$$M_1(x_1) = -Pl \quad \text{und} \quad Q_1(x_1) = 8P/3.$$

Mit diesen jetzt bekannten Werten werden die vier Vektoren $v_1(x_1)$, $v_1(x_2)$, $v_2(x_2)$ und $v_2(x_3)$ noch einmal rechts herausgezogen, indem man alle Werte der ersten Spalte mit $-Pl$ und die der zweiten mit $8P/3$ multipliziert und sämtliche auf einer Zeile stehenden Zahlen addiert. Nun läßt sich nach (10b) die Lösung im Feldinneren direkt hinschreiben:

$$v_1(x) = \mathfrak{F}_1^* \cdot [v_1(x_1) - 0] + p_1(x) \quad ; \quad v_2(x) = \mathfrak{F}_2^* \cdot v_2(x_2)$$

Aus der Feldmatrix (20) entnehmen wir die erste Zeile – das ist die Durchbiegung $y(x)$ selbst – und bekommen:

$$y_1(x) = 1 \cdot (0) + (x-x_1) \cdot (0) - (x-x_1)^2/2 \alpha_1 \cdot (-Pl) - (x-x_1)^3/6 \alpha_1 \cdot (8P/3) + q(x-x_1)^4/24 \alpha_1$$

$$y_2(x) = 1 \cdot (2Pl^3/9 \alpha) + (x-x_2) \cdot (Pl^2/3 \alpha) - (x-x_2)^2/2 \alpha_2 \cdot (2Pl/3) - (x-x_2)^3/6 \alpha_2 \cdot (0)$$

oder, wenn wir der Einfachheit halber $x_1 = 0$ (damit $x_2 = l$) und $\xi = x/l$ setzen, wegen $\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = 4\alpha$ und $ql = 4P$:

$$y_1(\xi) = \frac{Pl^3}{EJ_1} \cdot \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{4\xi^3}{9} + \frac{\xi^4}{6} \right) \quad ; \quad y_2(\xi) = \frac{Pl^3}{EJ_1} \cdot \left(\frac{2}{9} + \frac{\xi-1}{3} - \frac{(\xi-1)^2}{12} \right)$$

Die Abb. 6 zeigt die Biegelinie und das Kräftesystem im Gleichgewicht.

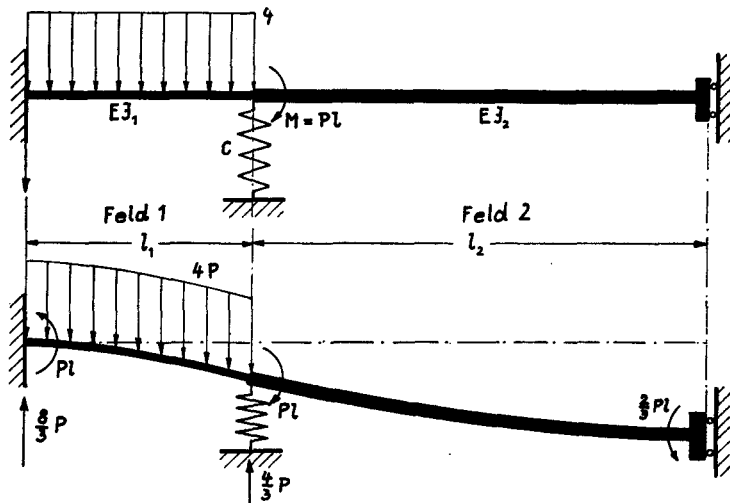


Abb. 5 u. 6

Beispiel 2. Für den n -feldrigen Knickstab der Abb. 7 ist die Eigenwertgleichung aufzustellen.

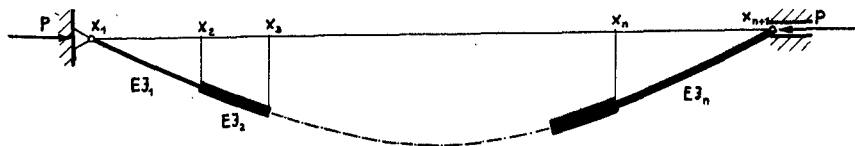


Abb. 7

An allen inneren Feldgrenzen gehen y , y' , M und Q stetig ineinander über; sämtliche Übergangsmatrizen sind daher gleich der Einheitsmatrix \mathbb{E} , so daß einfach gilt:

$$\psi_n(x_{n+1}) = \mathcal{L}_n \cdot \mathcal{L}_{n-1} \cdot \dots \cdot \mathcal{L}_2 \mathcal{L}_1 \cdot \psi_1(x_1)$$

An beiden Enden müssen Durchbiegung y und Moment M verschwinden. Wir führen die Rechnung mit den Leitmatrizen (24) für die ersten beiden Felder durch und bekommen:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} y_1'(x_1) & Q_1(x_1) \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = v_1(x_1) \\
 \mathfrak{L}_1 & \begin{bmatrix} 1 & l_1 & \frac{c_{11}-1}{P} & \frac{s_{11}/v_1-l_1}{P} \\ 0 & 1 & -\frac{v_1 s_{11}}{P} & \frac{c_{11}-1}{P} \\ 0 & 0 & c_{11} & s_{11}/v_1 \\ 0 & 0 & -v_1 s_{11} & c_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1 & \frac{s_{11}/v_1-l_1}{P} \\ 1 & \frac{c_{11}-1}{P} \\ 0 & s_{11}/v_1 \\ 0 & c_{11} \end{bmatrix} = v_1(x_2) \\
 & = v_2(x_3) \\
 \mathfrak{L}_2 & \begin{bmatrix} 1 & l_2 & \frac{c_{22}-1}{P} & \frac{s_{22}/v_2-l_2}{P} \\ 0 & 0 & -\frac{v_2 s_{22}}{P} & \frac{c_{22}-1}{P} \\ 0 & 0 & c_{22} & s_{22}/v_2 \\ 0 & 0 & -v_2 s_{22} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_1+l_2 & \frac{\left(s_{22} c_{11} + \frac{v_2}{v_1} c_{22} s_{11}\right)/v_2 - (l_1+l_2)}{P} \\ 1 & \frac{\left(c_{22} c_{11} - \frac{v_2}{v_1} s_{22} s_{11}\right) - 1}{P} \\ 0 & \left(s_{22} c_{11} + \frac{v_2}{v_1} c_{22} s_{11}\right)/v_2 \\ 0 & \left(c_{22} c_{11} - \frac{v_2}{v_1} s_{22} s_{11}\right) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Man erkennt, daß der Vektor $v_2(x_3)$ die gleiche Form hat wie $v_1(x_2)$, wenn man zur Abkürzung setzt:

$$\tilde{l}_2 = l_1 + l_2; \quad \tilde{s}_{22} = s_{22} c_{11} + \frac{v_2}{v_1} c_{22} s_{11}; \quad \tilde{c}_{22} = c_{22} c_{11} - \frac{v_2}{v_1} s_{22} s_{11} \quad (41)$$

und ganz allgemein ist offenbar:

$$\left. \begin{aligned}
 \tilde{l}_{i+1} &= l_1 + l_2 + \dots + l_{i+1} \\
 \tilde{s}_{i+1, i+1} &= s_{i+1, i+1} \tilde{c}_{ii} + \frac{v_{i+1}}{v_i} c_{i+1, i+1} \tilde{s}_{ii} \\
 \tilde{c}_{i+1, i+1} &= c_{i+1, i+1} \tilde{c}_{ii} - \frac{v_{i+1}}{v_i} s_{i+1, i+1} \tilde{s}_{ii} \\
 M_i(x_{i+1}) &= \tilde{s}_{ii}/v_i \cdot Q_1(x_1); \quad Q_i(x_{i+1}) = \tilde{c}_{ii} \cdot Q_1(x_1)
 \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Die gesuchte Knickbedingung lautet daher einfach

$$M_n(x_{n+1}) = \tilde{s}_{nn}/v_n \cdot Q_1(x_1) = 0, \text{ d. h. } \tilde{s}_{nn} = 0 \quad (43)$$

Für $\nu_1 = \nu_2 \dots = \nu_n = \nu$ gehen die Formeln (42) in die gewöhnlichen Additionstheoreme über, und es wird

$$\tilde{s}_{nn} = \sin \nu (l_1 + l_2 + \dots + l_n) = \sin \nu l = 0 \quad (44)$$

(43) stellt somit die Verallgemeinerung der bekannten Eulerschen Knickbedingung (44) dar. Ziehen wir noch nach jedem Rechenschritt den Faktor $c_{ii} = \cos \nu_i l_i$ heraus und setzen zur Abkürzung

$$\frac{M_i(x_{i+1})}{Q_1(x_1) c_{11} c_{22} \dots c_{ii}} = M_i^* ; \quad \frac{Q_i(x_{i+1})}{Q_1(x_1) c_{11} c_{22} \dots c_{ii}} = Q_i^* ; \quad \frac{\text{tang } \nu_i l_i}{\nu_i} = t_i \quad (45)$$

so lassen sich Moment und Querkraft für die ersten Felder leicht angeben:

x_i	M^*	Q^*
x_1	0	
x_2	t_1	1
x_3	$t_1 + t_2$	$1 - t_1 t_2 \nu_2^2$
x_4	$t_1 + t_2 + t_3 - t_1 t_2 t_3 \nu_2^2$	$1 - t_1 t_2 \nu_2^2 - (t_1 + t_2) t_3 \nu_3^2$

(46)

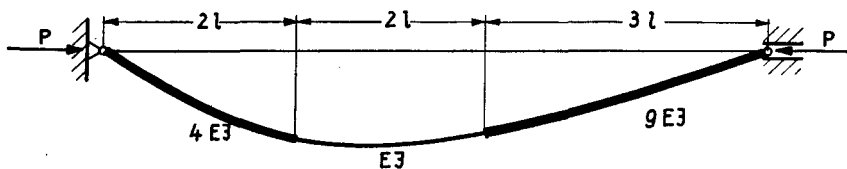


Abb. 8

Die weiteren Ausdrücke findet man aus der Rekursionsformel (42), doch schwellen die Formeln ziemlich stark an, was ihren praktischen Wert in Frage stellt. Insbesondere sei nun der Balken der Abb. 8 mit drei Feldern gegeben. Da $\nu_i^2 = P/EJ_i$ ist, wird mit $\nu = \sqrt{P/EJ}$ und der Abkürzung $\text{tang } \nu l = z$ wegen $l_1 = l_2 = 2l$, $l_3 = 3l$:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= \nu/2; & t_1 &= \text{tang } \nu_1 l_1 / \nu_1 = 2z/\nu, \\ \nu_2 &= \nu; & t_2 &= \text{tang } \nu_2 l_2 / \nu_2 = 2z/\nu (1-z^2) \\ \nu_3 &= \nu/3; & t_3 &= \text{tang } \nu_3 l_3 / \nu_3 = 3z/\nu. \end{aligned}$$

Dann ist $M^*(x_4)$ gleich Null zu setzen, und das gibt nach (46):

$$\begin{aligned} M^*(x_4) &= t_1 + t_2 + t_3 - t_1 t_2 t_3 \nu_2^2 = \\ &= \frac{1}{\nu} \left(2z + \frac{2z}{1-z^2} + 3z \right) - \frac{2z \cdot 2z \cdot 3z}{\nu^3 (1-z^2)} \cdot \nu^2 = \frac{z(7-17z^2)}{\nu(1-z^2)} = 0 \end{aligned}$$

Mit den Lösungen $z = \tan \nu l = 0$ oder $\sqrt{7/17} = \pm 0,64$ gibt es nach Abb. 9 drei Serien äquidistanter Eigenwerte; der kleinste positive ist $\nu l = 0,57$, damit wird die gesuchte Knicklast $P = 0,57^2 \cdot EJ/l^2 = 0,325 EJ/l^2$.

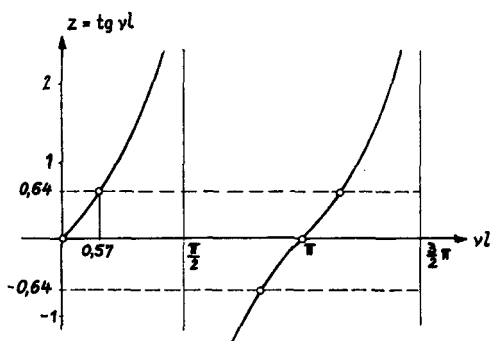


Abb. 9

Beispiel 3: Ein Balken ist an beiden Enden elastisch gestützt (Federkonstanten c_1 und c_2) und trägt zwei Endmassen m_1 und m_2 (Abb. 10). Wie lautet die Frequenzgleichung?

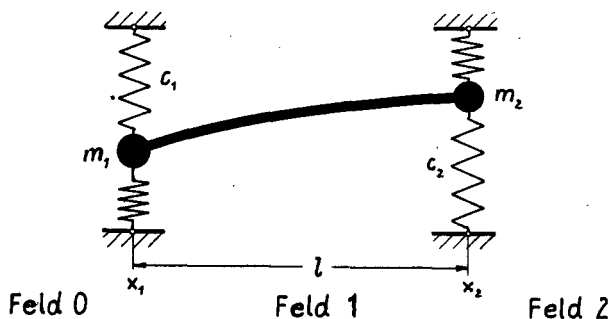


Abb. 10

In den Feldern 0 und 2 müssen Moment M und Querkraft Q verschwinden; wir haben daher in den Vektoren

$$v_0(x_1) \text{ und } v_2(x_2) = \mathfrak{L}_2 \cdot \mathfrak{L}_1 \cdot \mathfrak{L}_1 \cdot v_0(x_1)$$

die letzten beiden Komponenten gleich Null zu setzen. In zweireihigen Untermatrizen schreiben wir mit

$$v_0(x_1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{D} \end{bmatrix}; \mathfrak{L}_1 = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \mathfrak{U} & \mathfrak{B} \\ \alpha^2 k^4 \mathfrak{B} & \mathfrak{U} \end{bmatrix} \quad (28)$$

$$\mathfrak{U}_i = \begin{bmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{B}_i & \mathfrak{E} \end{bmatrix} \quad (36) \text{ bzw. } (33)$$

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{D} \end{bmatrix} && = v_0(x_1) \\ \mathfrak{U}_1 & \begin{bmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{E} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathfrak{E} \\ \mathfrak{B}_1 \end{bmatrix} && = v_1(x_1) \\ \mathfrak{L}_1 & \begin{bmatrix} \mathfrak{U} & \mathfrak{B} \\ \alpha^2 k^4 \mathfrak{B} & \mathfrak{U} \end{bmatrix}^{1/2} & \begin{bmatrix} \mathfrak{U} + \mathfrak{B} \mathfrak{B}_1 \\ \alpha^2 k^4 \mathfrak{B} + \mathfrak{U} \mathfrak{B}_1 \end{bmatrix}^{1/2} && = v_1(x_2) \\ \mathfrak{U}_2 & \begin{bmatrix} \mathfrak{E} & \mathfrak{D} \\ \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{E} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \mathfrak{U} + \mathfrak{B} \mathfrak{B}_1 \\ \mathfrak{B}_2(\mathfrak{U} + \mathfrak{B} \mathfrak{B}_1) + \alpha^2 k^4 \mathfrak{B} + \mathfrak{U} \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{R} \end{bmatrix}^{1/2} && = v_2(x_2) \end{aligned}$$

Die Frequenzgleichung ist somit $|\mathfrak{R}| = 0$. Nach einiger Rechnung wird

$$0 = \frac{\mathfrak{Cof} kl \cdot \cos kl - 1}{\beta_1 \beta_2} + \left(\frac{1}{\beta_1} + \frac{1}{\beta_2} \right) \frac{\mathfrak{Cof} kl \cdot \sin kl - \mathfrak{Sin} kl \cdot \cos kl}{\alpha k^3} - \frac{2 \mathfrak{Sin} kl \cdot \sin kl}{(\alpha k^3)^2}$$

oder einfach

$$0 = \varrho_1 \varrho_2 \cdot D(kl) + (\varrho_1 + \varrho_2) \cdot B(kl) - S(kl)$$

mit den Abkürzungen

$$\varrho_i = \frac{\alpha k^3}{c_i - m_i \omega^2}; \quad k^4 = \frac{\mu \omega^2}{\alpha}; \quad \alpha = EJ$$

und den von *Hohenemser-Prager* [4] eingeführten und tabulierten Funktionen

$$D(kl) = \mathfrak{Cof} kl \cdot \cos kl - 1;$$

$$B(kl) = \mathfrak{Cof} kl \cdot \sin kl - \mathfrak{Sin} kl \cdot \cos kl;$$

$$S(kl) = 2 \mathfrak{Sin} kl \cdot \sin kl.$$

Setzt man insbesondere $c_1 = c_2 = \infty$, d. h. $\varrho_1 = \varrho_2 = 0$, so verbleibt die bekannte Frequenzgleichung $S(kl) = 0$ für den beiderseits gelenkig gestützten Balken; für den beiderseits freien Balken ohne Endmassen dagegen wird mit $\varrho_1 = \varrho_2 = \infty$ zugleich auch $D(kl) = 0$.

7. Zusammenfassung

Wir haben gezeigt, wie sich mit Hilfe der Leit- und Übergangsmatrizen jeder n -feldrige Balken im Prinzip auf den Balken mit nur einem einzigen Feld zurückführen läßt und an Beispielen vorgeführt, wie man auf systematische Weise zu allgemeingültigen geschlossenen Formeln ebenso wie zur

numerischen Lösung einer vorgelegten speziellen Aufgabe kommt. Die Knick- bzw. Frequenzdeterminante ist stets von der Ordnung zwei im Gegensatz zu zahlreichen anderen Verfahren der Praxis, bei denen die Ordnung der Determinante mit der Felderzahl anwächst.

Literatur

- [1] *Biezeno-Grammel*, „Technische Dynamik“. Springerverlag 1952.
- [2] *Bollermann, W.*, „Schwingungen von Gerberträgern“. Diplomarbeit Te. Ho. Hannover 1951 (Ref. Prof. *Collatz*).
- [3] *Collatz, L.*, „Eigenwertaufgaben mit technischen Anwendungen“. Akad. Verlagsges. Geest und Portig K.-G. Leipzig 1949.
- [4] *Hohenemser-Prager*, „Dynamik der Stabwerke“, Springerverlag 1933.
- [5] *Pestel, E.*, „Ein allgemeines Verfahren zur Berechnung freier und erzwungener Schwingungen von Stabwerken“. Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft, Band VI, 1954, Verlag Vieweg und Sohn, Braunschweig.
- [6] *Pflüger, A.*, „Stabilitätsprobleme der Elastomechanik“, Springerverlag 1950.
- [7] *Fuhrke, H.*, „Exakte und näherungsweise Bestimmung von Stabwerkschwingungen“. Diss. Techn. Hochschule Darmstadt 1953. Ref. Prof. Dr.-Ing. *K. Marguerre* und *K. Karas*.
- [8] *Unger-Schäfer*, „Berechnung kritischer Drehzahlen mehrfach gelagerter Wellen mit der elektronischen Remington-Rand-Rechenanlage 409-2“. Hausmitteilungen der Remington Rand GmbH, Frankfurt/Main, Heft 159, Januar 1954, 19. Jahrgang.
- [9] *Marguerre, K.*, „Anwendung von Matrizen bei Schwingungs- und Stabilitätsproblemen“. ZAMM, Bd. 35, Nr. 8/9, 1955.
- [10] *Schnell, W.*, „Berechnung der Stabilität mehrfeldriger Stäbe mit Hilfe von Matrizen“. ZAMM, Bd. 35, Bd. 6/7, 1955.
- [11] *Falk, S.*, „Die Knickformeln für den Stab mit n Feldern konstanter Biegesteifigkeit“. Ing.-Archiv, XXIV. Band, 1956.